série
conhecimento

Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Arquitetura e Urbanismo

DESENHO GEOMÉTRICO

Clarissa Ferreira Albrecht
Luiza Baptista de Oliveira

cead
Coordenadoria de Educação
Aberta e a Distância

20

Universidade Federal de Viçosa

Reitora
Nilda de Fátima Ferreira Soares

Vice-Reitor
Demetrius David da Silva

Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância

Diretor
Frederico Vieira Passos

Avenida PH Rolfs s/n
Campus Universitário, 36570-000, Viçosa/MG
Telefone: (31) 3899 2858 | Fax: (31) 3899 3352

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

A341d 2013	Albrecht, Clarissa Ferreira, 1981- Desenho geométrico [recurso eletrônico] / Clarissa Ferreira Albrecht, Luiza Baptista de Oliveira.– Viçosa, MG : Ed. UFV, 2013. 3,39MB ; ePUB. (Conhecimento, ISSN 2179-1732 ; n.20) Guia de referência rápida Biblioteca de Funções ALFA. 1. Desenho geométrico. 2. Geometria plana. I. Oliveira, Luiza Baptista de, 1985-. II. Universidade Federal de Viçosa. Reitoria. Coordenadoria de Educação Aberta e a Distância. II. Título CDD 22. ed. 604.2

ALBRECHT, Clarissa e OLIVEIRA, Luiza - Desenho Geométrico. Viçosa, 2012.

Layout e Capa: Diogo Rodrigues e Daniel Fardin

Editoração Eletrônica: Diogo Rodrigues

Desenhos elaborados no GeoGebra: Cristiano Ferreira de Oliveira

Revisão Final: João Batista Mota

Sumário

Apresentação

Este material foi desenvolvido como apoio didático à disciplina de graduação ARQ 102 Desenho Geométrico, oferecida pelo Departamento de Arquitetura e Urbanismo da Universidade Federal de Viçosa.

O objetivo é apresentar, de forma lógica e instrutiva, o conteúdo abordado na disciplina Desenho Geométrico, possibilitando o estudo e o entendimento de outros tipos de desenhos úteis na Arquitetura, Engenharia, Matemática e outras áreas de conhecimento.

Ressalta-se que o estudo e a prática do Desenho Geométrico se constituem num exercício mental capaz de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo e a criatividade na busca por soluções de problemas diversos.

Introdução

1.1 O que é o Desenho Geométrico

De acordo com sua finalidade, o desenho pode ser classificado em três áreas gerais:

- Desenho de Expressão ou Artístico
- Desenho de Representação ou Técnico
- Desenho de Resolução ou de Precisão

O Desenho de Resolução ou de Precisão abrange o Desenho Geométrico, a Geometria Descritiva e a Perspectiva.

Especificamente, o Desenho Geométrico é um conjunto de técnicas utilizadas para construção de formas geométricas desenvolvidas na resolução de problemas para obter-se respostas tão precisas quanto possível.

O processo de Desenho Geométrico baseia-se nas construções com régua e compasso regidas pelos três primeiros dos cinco Postulados de Euclides, sendo eles:

a. Traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer;
b. Estender um segmento de reta continuamente em uma linha reta;
c. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio;
d. Todos os ângulos retos são iguais;
e. Que, se uma linha reta caindo sobre duas linhas retas faz ângulos internos do mesmo lado cuja soma seja menor do que dois retos, as duas linhas retas, se estendidas indefinidamente, encontram-se no mesmo lado em que a soma dos ângulos internos é menor do que dois retos.

Embora o uso de régua e compasso tenha uma relevância histórica, a importância do Desenho Geométrico para o desenvolvimento das faculdades espaciais tem favorecido a adesão de sistemas computacionais como ferramentas no processo de ensino-aprendizagem. Tais sistemas possibilitam a obtenção de desenhos ainda mais precisos, além de favorecer a aplicação do Desenho Geométrico nas áreas de atuação que nele se baseiam.

1.2 A origem do Desenho Geométrico

As formas geométricas estão em toda parte. A **Geometria** foi desenvolvida a partir de observações exaustivas para suprir a necessidade do homem em dominar as propriedades do espaço utilizando o sistema de pontos, linhas, superfícies e sólidos.

Para os matemáticos da Antiguidade, foi imprescindível que houvesse métodos de construções geométricas necessários ao entendimento e enriquecimento teórico da Geometria, e ao desenvolvimento das soluções dos problemas geométricos.

A Geometria como ciência dedutiva teve início na Grécia Antiga, aproximadamente no século VII a.C., graças aos esforços de filósofos predecessores de Euclides, como Tales de Mileto, Pitágoras e Eudoxio. Por volta de 300 a.C., Euclides deu uma grande contribuição para a Geometria ao escrever o livro *Elementos* que é constituído por 13 volumes. Nesta obra, o autor descreveu a Geometria de modo elaborado e estabeleceu um método de demonstração clara e rigorosa.

Foram os gregos que deram um molde dedutivo à Matemática. A partir da Geometria Grega foi desenvolvido o **Desenho Geométrico** a ser tratado nesta apostila. Não havia entre os gregos uma diferenciação entre Desenho Geométrico e Geometria. O Desenho Geométrico era utilizado na forma de construções geométricas para solucionar um problema teórico dos textos de Geometria.

Assim, pode-se dizer que o Desenho Geométrico é uma parte da Geometria que, desde a Antiguidade até os dias atuais, propõe-se a resolver graficamente problemas de natureza teórica e prática que permeiam inúmeros âmbitos do cotidiano.

1.3 A importância do Desenho Geométrico

O Desenho Geométrico ocupa lugar de destaque no estudo e na prática da Matemática devido ao fato de muitos problemas técnicos poderem ser resolvidos com maior rapidez e clareza por meio de processos gráficos do que por processos analíticos.

O Desenho Geométrico é uma das bases que sustentam o Desenho Técnico, o Desenho de Resolução (Grafostática, Óptica Gráfica e Namografia etc.) e ainda o Desenho Artístico.

A exatidão e a precisão exigidas no Desenho Geométrico fazem dele um aliado importante na aplicação de conceitos da Geometria em áreas significativas do conhecimento humano, como a Arquitetura, a Engenharia, a Matemática, entre outras. Por meio do Desenho Geométrico são encontradas respostas precisas para problemas de natureza prática ou teórica. O exercício intelectual feito na busca por soluções exatas permite que o estudante desenvolva a habilidade de visualizar, prever e gerar novas ideias.

A técnica

2.1 Postulados do Desenho Geométrico

Cada tipo de desenho tem seus próprios postulados, inclusive seus próprios instrumentos de trabalho. Para que o estudo do Desenho Geométrico possa ser encadeado de forma lógica e racional, visando a construção do conhecimento e o desenvolvimento do raciocínio gráfico, é necessária a adoção de alguns postulados, baseados na teoria e consagrados pelo uso.

1º Postulado: Os instrumentos permitidos no Desenho Geométrico são a régua e o compasso comum e de ponta seca, com os quais podem ser executadas as seguintes operações gráficas:

- Assinalar um ponto geométrico, pela intercessão de duas linhas;
- Traçar uma reta completamente arbitrária ou arbitrária passando por um ponto;
- Traçar uma reta por dois pontos conhecidos;
- Traçar um arco de circunferência, de centro e raio arbitrários ou um deles conhecido;
- Traçar um arco de circunferência de centro e raio conhecido;
- Transportar um segmento conhecido.

A graduação da régua **somente** deve ser utilizada para colocar no papel os dados de um problema ou eventualmente para conferir uma resposta.

2º Postulado: Não é permitido fazer contas com as medidas dos dados devendo a resposta ser obtida graficamente, entretanto, são permitidas considerações algébricas na dedução ou justificativa de um problema.

Ex. determinação do ponto médio de um segmento, quarta proporcional etc.

3º Postulado: Não é permitido obter respostas "à mão livre" ou "por tentativa e erro". Esses "métodos" podem levar a particularização da solução, que pode não se aplicar quando alteram-se os dados do problema.

2.2 O material de desenho

Na prática do Desenho Geométrico, ter o material adequado é fundamental, mas não suficiente; é imprescindível saber usá-lo de forma correta.

a) Superfície de trabalho

A superfície de trabalho deve ser plana, regular e limpa. O papel deve ser fixado sobre a mesa de trabalho com uso de fita adesiva em suas extremidades.

b) Lapiseira

Priorizar o uso de lapiseira com ponta de, no máximo, 0,5mm e grafite com dureza média, tipo HB. Ao utilizar a lapiseira, apóie bem a mão sobre o papel e trace da esquerda para direita.

c) Borracha

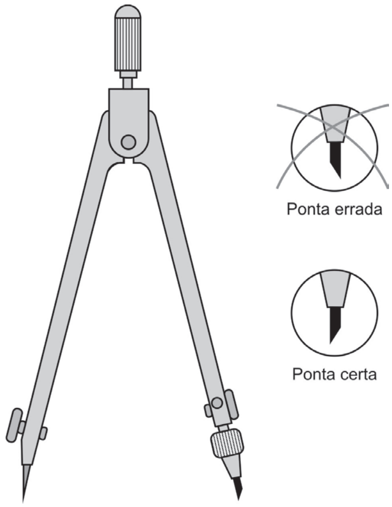
É aconselhável que a borracha seja macia, apague com facilidade - sem agredir o papel, esteja sempre limpa e seja movimentada sempre no mesmo sentido, segurando a folha com a outra mão.

d) Régua

Deve-se utilizar uma régua de alta precisão. Conserve a régua limpa usando uma flanela. Não utilize a régua para cortar papel.

e) Compasso

É importante que o compasso apresente abertura firme, e que a ponta de grafite esteja lixada corretamente. O raio do compasso deve ser ajustado fora do desenho em resolução. O giro do compasso deve ser conduzido apenas no sentido horário.



2.3 Erros Gráficos

Um futuro profissional de Matemática, Engenharia ou Arquitetura precisa saber desenhar com precisão e destreza. O estudo dos erros gráficos é fundamental para que, desde o início, o estudante desenvolva o hábito de desenhar de forma correta e, assim, alcançar uma precisão cada vez maior na resolução gráfica de problemas.

O erro gráfico relacionado à precisão é inevitável, entretanto, pode ser minimizado. Para isto, é necessário conhecer os tipos de erros, suas origens e formas práticas de minimizá-los.

Podemos definir dois tipos de erros:

- *Erro gráfico linear* é a distância entre o ponto procurado e o ponto obtido graficamente, e;
- *Erro gráfico angular* é o ângulo entre a reta procurada e a reta obtida graficamente.

Tanto o **erro linear** como o **erro angular** pode ser classificado em dois tipos:

- *Erro parcial* é o erro cometido em cada operação gráfica, e
- *Erro total* é o somatório dos erros parciais obtido no final da construção gráfica.

Existem basicamente três causas para os erros gráficos parciais:

- Representação das linhas e pontos geométricos por meio de traços, pois o ponto geométrico não tem dimensão e a linha, apenas uma dimensão. No entanto, linhas e pontos são representados graficamente por meio de traços, e assim estes elementos adquirem dimensão. Portanto, o traço utilizado na obtenção de pontos e linhas deve ser o mais estreito possível.

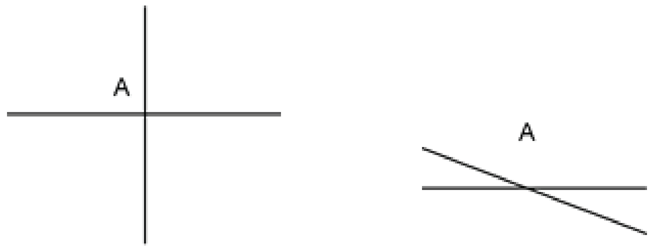
- Imperfeições dos instrumentos de desenho. Portanto, para aproximar-se mais da precisão exigida devem ser utilizados instrumentos de desenho de melhor qualidade e grafite com dureza média.
- Deficiência do desenhista, devido à falta de prática, cuidado e conhecimento.

2.4 Preceitos para minimizar o erro gráfico

Além da prática do desenhista aliada ao uso dos instrumentos adequados, algumas técnicas de desenho podem ajudar a diminuir o erro gráfico na resolução de um problema de Desenho Geométrico, de forma a obter um resultado com maior precisão, qualidade básica no Desenho de Resolução e Precisão.

Abaixo encontram-se os preceitos para minimizar o erro gráfico no Desenho Geométrico:

1º Preceito: Um ponto é sempre determinado pela interseção de duas linhas, que não devem se interceptar muito obliquamente, minimizando o erro linear.



Certo Errado

2º Preceito: Uma reta é sempre determinada por dois pontos, que devem estar o mais afastado possível um do outro, minimizando o erro angular *a*.

3º Preceito: Para a resolução de um problema, existe geralmente mais de um processo. Com isso, deve ser escolhido o processo que tem o menor número de operações gráficas, minimizando desta forma o erro total.

4º Preceito: Não fazer operações supérfluas, mas aproveitar traços já desenhados.

5º Preceito: Traçar as linhas com comprimento suficiente para não precisar prolongá-las depois.

6º Preceito: Não usar linhas de construção tracejadas.

7º Preceito: Ao traçar mais de uma paralela ou perpendicular tenha sempre a mesma reta base como referência.

8º Preceito: Procurar usar sempre pontos, linhas e segmentos dados, ao invés dos obtidos, minimizando o acúmulo de erros gráficos.

2.5 Tipos de linhas

Na resolução gráfica dos problemas de Desenho Geométrico devem ser utilizadas somente **linhas contínuas estreitas**, que devem ser:

- Forte para os dados e resultados
- Leve para as linhas auxiliares

2.6 Convenções

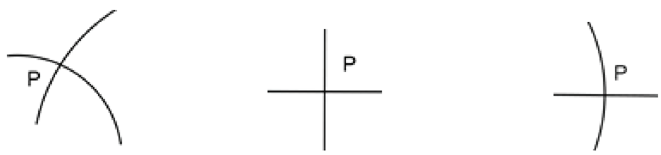
Ao resolver graficamente um problema é obrigatório nomear, ou seja, colocar letras, nos dados e nas respostas, mas é facultativo nomear os pontos e linhas auxiliares. Cada figura geométrica possui uma convenção específica, como se segue:

A Ponto: qualquer letra latina maiúscula
a Reta: qualquer letra latina minúscula
AB Segmento de reta: duas letras maiúsculas latinas
α Ângulo: qualquer letra do alfabeto grego
$=$ Igual
$\neq$ Diferente
$\equiv$ Coincidente
$\sim$ Semelhante
$\approx$ ou $\Leftrightarrow$ Equivalente
$\varnothing$ Diâmetro
$\perp$ Perpendicular
// Paralelo

2.7 Conceitos geométricos

a) O ponto

Em Desenho Geométrico, o ponto é representado pela interseção de duas linhas, que podem ser retas ou curvas. O ponto não tem largura nem comprimento, sendo assim adimensional.



b) A linha

A representação de uma linha é feita pelo movimento da lapiseira sobre o papel. A linha não tem largura, tem apenas comprimento.

c) A reta

A reta é definida como o resultado do deslocamento de um ponto em uma única direção. Uma reta possui infinitos pontos e é infinita nos dois sentidos, ou seja, não tem começo nem fim. Por um único ponto passam infinitas retas, enquanto que, por dois pontos, passa apenas uma reta.

d) Semirreta

A semirreta é a parte da reta limitada por um de seus pontos. Assim, trata do deslocamento de um ponto em uma única direção e em um único sentido. A semirreta apresenta um ponto de origem sendo infinita apenas em um sentido.

e) Segmento de reta

Segmento de reta é a parte da reta limitada por dois de seus pontos. Por ele ser limitado é possível atribuir-lhe um comprimento.

2.8 Posições Relativas

a) Pontos colineares

São pontos que pertencem a uma mesma reta.

b) Segmentos colineares

São segmentos que pertencem a uma mesma reta.

c) Segmentos consecutivos

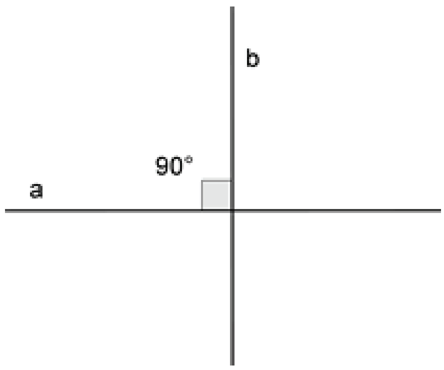
São segmentos cuja extremidade de um coincide com a extremidade do outro.

d) Retas concorrentes

São retas que concorrem, ou seja, se interceptam, em um único ponto comum às duas retas.

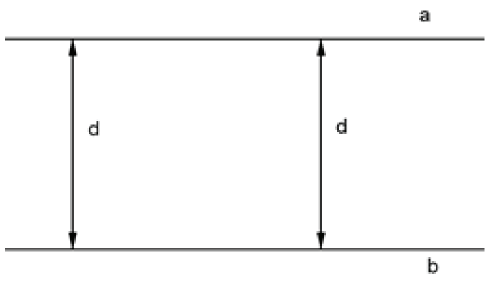
e) Retas perpendiculares

São retas que se interceptam formando um ângulo reto, ou seja, de 90º.



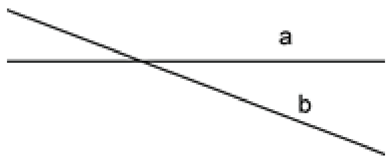
g) Retas paralelas

São retas que conservam entre si sempre a mesma distância, isto é, não possuem ponto em comum.



h) Retas oblíquas ou inclinadas

São retas que se interceptam formando um ângulo qualquer, diferente de 90º.



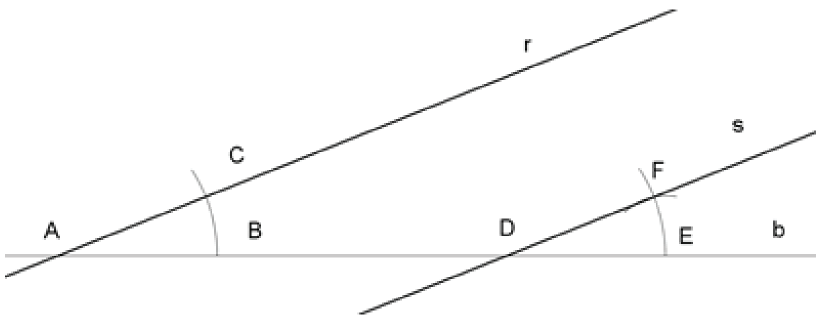
Construções fundamentais

As construções fundamentais são aquelas básicas, necessárias para a resolução dos problemas de Desenho Geométrico e também de outros tipos de desenho. A seguir, serão apresentados os processos que permitem a solução com o menor número de operações gráficas utilizadas para as construções fundamentais.

3.1 Transporte, soma e subtração de ângulos e segmentos

O transporte, a soma e a subtração de ângulos são feitos pela construção de triângulos semelhantes, em que um de seus ângulos internos é o ângulo dado.

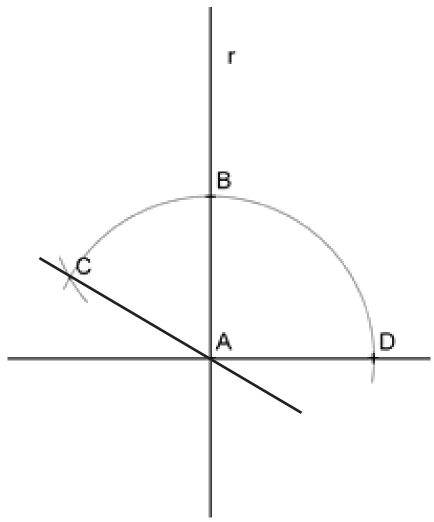
a.Dada uma reta *r* com uma inclinação qualquer, construa uma reta *s*, que apresente a mesma inclinação de *r*.



CONSTRUÇÃO

Construir uma reta *b* qualquer, que intercepte a reta *r* em *A*. Com centro em *A*, traçar um arco de raio qualquer que intercepte a reta *r* em *C*, e a reta *b* em *B*. Definir um ponto *D* qualquer sobre a reta *b*. Com centro em *D*, traçar um arco de raio *AB* que intercepte a reta *b* em *E*. Com o raio do compasso igual a *BC*, marcar o ponto *F* traçando um arco com centro em *E*. Por fim, construir uma reta que contenha *D* e *F*. O transporte de ângulos é feito de maneira análoga.

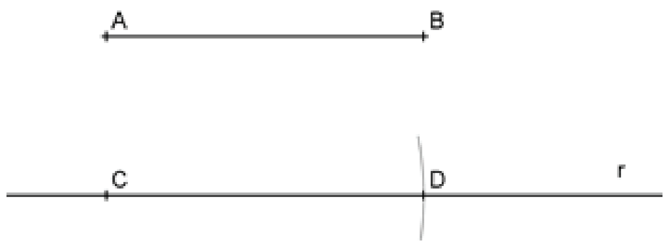
b. Somar um ângulo de 60º, a partir de um ângulo de 90º dado.



CONSTRUÇÃO

Com centro no ponto *A*, traçar um arco que intercepte a reta *r* em *B*. Com centro em *B* e raio *AB* interceptar o arco de raio *AB* em *C*. Traçar um segmento de reta a partir de *A* em direção ao ponto *C*. O ∠*CAD* é igual a 150°.

c. Dado um segmento *AB* qualquer, transportar a medida *AB* para reta *r*.

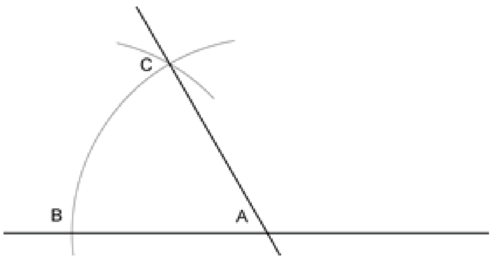


CONSTRUÇÃO

Com centro em um ponto *C* qualquer, pertencente à reta *r*, traçar um arco de raio *AB* que intercepte a reta *r* determinando o ponto *D*.

3.2 Construção de ângulos

Ângulo de 60º



JUSTIFICATIVA

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Por construção, o triângulo *ABC* é equilátero, portanto, os seus ângulos internos são iguais a 60º.

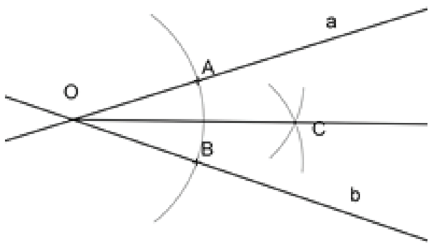
CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta qualquer. Sobre a reta marcar um ponto *A*. Fazer um arco com centro em *A*, de raio arbitrário, encontrando assim o ponto *B* sobre a reta. Com centro em *B* e raio *AB* traçar outro arco obtendo assim *C*. Traçar uma reta contendo *A* e *C*.

Bissetriz

Dado um ângulo formado pelo encontro de duas retas concorrentes, define-se como bissetriz a reta que passa pelo vértice deste ângulo cujos pontos são equidistantes das duas retas que determinam o ângulo.

a. Dadas as retas *a* e *b* concorrentes no ponto *O*, traçar a bissetriz do ângulo formado.



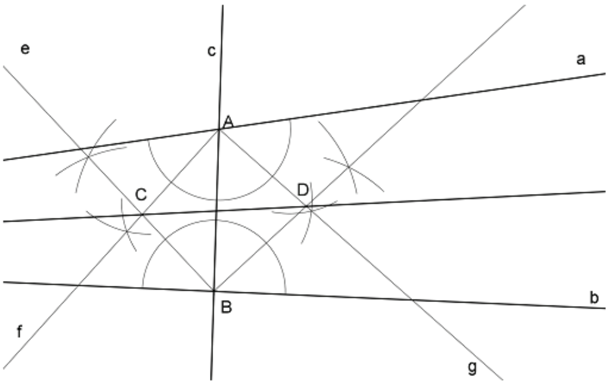
JUSTIFICATIVA

Por construção,
$OA = OB$
$AC = BC$
OC é comum aos ΔOAC e ΔOBC.
$\angle AOC = \angle BOC$
Logo, OC é a bissetriz do $\angle AOB$.

CONSTRUÇÃO

Traçar um arco com raio qualquer e centro em *O*, determinando os pontos *A* e *B*. Traçar dois arcos de mesmo raio *r*, sendo $r > 1/2AB$, com centros em *A* e em *B* determinando *C*. A bissetriz é a semirreta de origem *O* que contém *C*.

b. Dadas as retas *a* e *b* concorrentes, traçar a bissetriz do ângulo sem usar o vértice.



JUSTIFICATIVA

Os pontos *C* e *D*, determinados pela interseção das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas *a*, *b* e *c*, são equidistantes de *a* e *b* (também de *c*).

Logo, a reta *d* que contem *C* e *D* é a bissetriz das retas *a* e *b*.

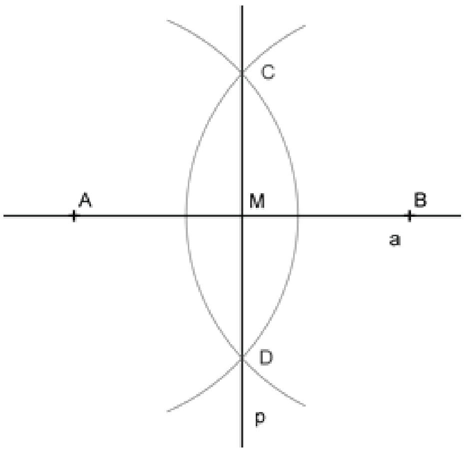
CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *c* que intercepte a reta *a* em *A* e a reta *b* em *B*. Traçar as bissetrizes dos ângulos com vértice em *A* e em *B*. A intercessão das bissetrizes definirá os pontos *C* e *D*. Traçar a reta definida por *C* e *D*.

Ângulo de 90°

A construção básica para o traçado de duas retas perpendiculares, ou seja, que determinam um ângulo de 90° entre si, baseia-se na definição de mediatriz. Por definição, a **mediatriz de um segmento** é a reta perpendicular ao segmento no seu ponto médio, e tem como propriedade que todos os seus pontos, e somente eles, equidistam das extremidades do segmento.

a. Dados os pontos *A* e *B*, pertencentes a uma reta *a*, construir uma reta *p* perpendicular à reta *a*, passando pelo ponto médio do segmento *AB*. Desta forma, a reta *p* será a mediatriz de *AB*.



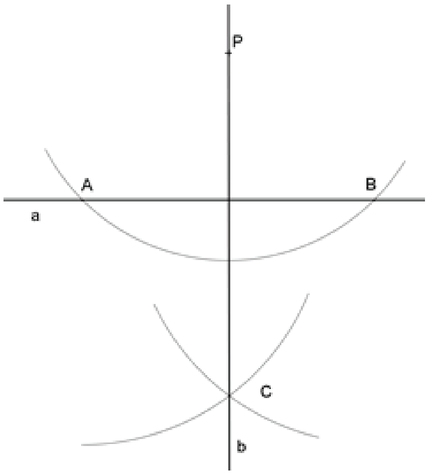
JUSTIFICATIVA

Por construção,
AC = *BC*
AD = *BD*
Logo, *C* e *D* pertencem à mediatriz de *AB* e a reta *p* definida por *C* e *D* será perpendicular à reta *a*.

CONSTRUÇÃO

Tomando o ponto *A* como centro traçar um arco de raio *r*, tal que *r* >1/2 *AB*. Com centro em *B*, traçar outro arco de mesmo raio, obtendo assim os pontos *C* e *D*, determinados pela interseção dos arcos. A mediatriz será, então, a reta *p* que contém *C* e *D*.

b. Dados uma reta *a* e um ponto *P*, construir uma reta *b* perpendicular à reta *a* passando pelo ponto *P*. O ponto *P* pode pertencer ou não à reta *a*.



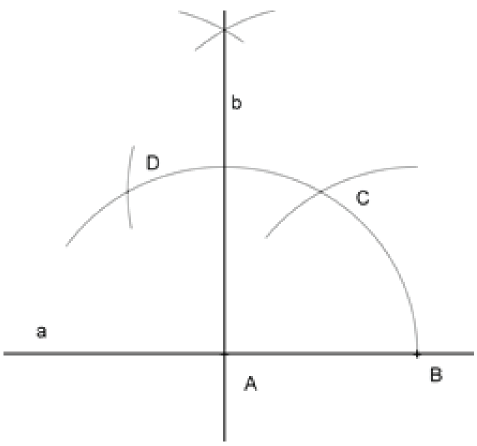
JUSTIFICATIVA

Por construção,
PA = *PB*
AC = *BC*
Logo *P* e *C* pertencem à mediatriz de *AB* e, consequentemente, a reta *b*, definida por *P* e *C*, será perpendicular à reta *a*.

CONSTRUÇÃO

Traçar um arco com centro em *P*, cujo raio seja maior que a distância de *P* à reta *a* obtendo assim dois pontos *A* e *B*. Em seguida traçar a mediatriz do segmento *AB*, definida pelos pontos *P* e *C*. Note que a reta *b* procurada é mediatriz do segmento *AB*.

c. Dada a reta *a*, construir uma reta *b* perpendicular à reta *a*.



JUSTIFICATIVA

$\angle BAC = \angle CAD = 60°$
$\angle BAC + \angle CAD/2 = 90°$

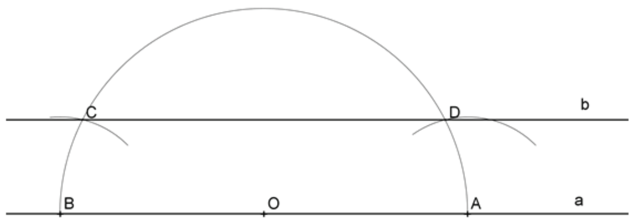
CONSTRUÇÃO

Marcar um ponto O qualquer sobre a reta a. Com centro em *O* e raio *OA* traçar uma semicircunferência obtendo o ponto *B*. Com centro em *A* e raio *r* qualquer, construir um arco determinando o ponto *B*. Com mesmo raio *r*, determinar *C* traçando um arco com centro em *B*. Determinar *D* traçando outro arco de mesmo raio *r* e centro em *C*. Por fim, determinar a bissetriz do ângulo *CÂD*.

3.3 Paralelas

Por definição, duas retas são paralelas quando todos os pontos pertencentes a uma estão à mesma distância da outra, sendo que a distância entre um ponto e uma reta é a menor distância possível entre eles. Portanto, esta distância é determinada pela perpendicular à reta que passa pelo ponto.

a. Dados uma reta *a* e um ponto *A*, traçar uma reta *b* paralela à *a,* utilizando o ponto *A*.



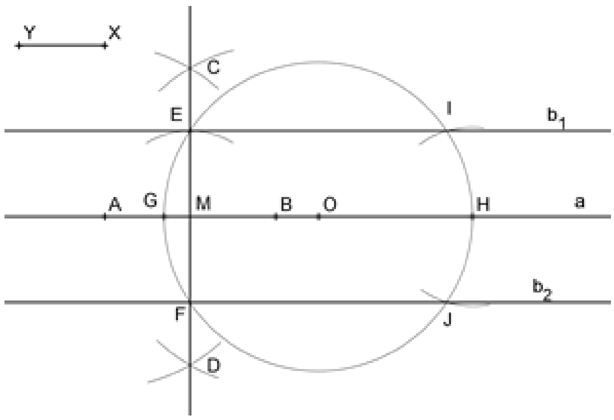
JUSTIFICATIVA

Por construção, os ΔAOD e ΔBOC são iguais, logo têm alturas iguais,
Da = Ca.
Portanto, *DC // AB.*
Ou, *a // b.*

CONSTRUÇÃO

Marcar um ponto *O* qualquer sobre a reta a. Com centro em *O* e raio *OA* traçar uma semicircunferência obtendo o ponto *B*. Com raio arbitrário e centro em *A*, traçar um arco interceptando a semicircunferência e determinando o ponto *D*. Com mesmo raio arbitrário e centro em *B*, determinar o ponto *C*. Unindo os pontos C e D tem-se a reta *b*, paralela à reta *a*.

b. Dada uma reta *a*, traçar as paralelas *b* a uma distância *XY* da reta *a*.



JUSTIFICATIVA

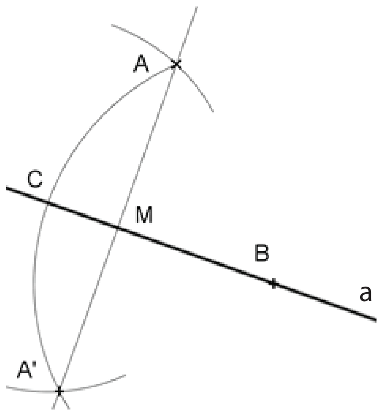
EM = XY
GE = HI

CONSTRUÇÃO

Neste caso é necessário construir pelo menos uma reta perpendicular à *a* e marcar sobre ela, a partir da sua interseção com *a*, a distância dada, *XY*. Para concluir a resolução, pode ser utilizada a solução apresentada no item anterior ou ser construída outra perpendicular marcando a distância dada sobre ela.

3.4 Simetria

A **simetria axial** consiste na reflexão de um ponto em relação a uma reta que é o eixo de simetria. Dois pontos simétricos a um eixo de simetria apresentam duas propriedades: a reta determinada por eles é perpendicular ao eixo de simetria e eles são equidistantes do eixo.



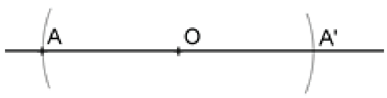
JUSTIFICATIVA

AA' ⊥ *a*
AM = *A'M*
A' é simétrico ao ponto *A* em relação à reta *a*.

CONSTRUÇÃO

Dados uma reta *a* e um ponto *A* arbitrário, não pertencente à *a*, marcar um ponto *B* qualquer sobre a reta *a*. Com centro em *B* e raio *AB* traçar um arco obtendo assim o ponto *C*. Com centro em *C* e raio *AC*, obter o ponto simétrico *A'* na interseção entre os arcos.

A **simetria central** consiste na reflexão de um ponto em relação a outro que é o centro de simetria. Dois pontos simétricos a um terceiro apresentam duas propriedades: os dois pontos simétricos e o centro de simetria são colineares, e os pontos simétricos são equidistantes do centro de simetria.



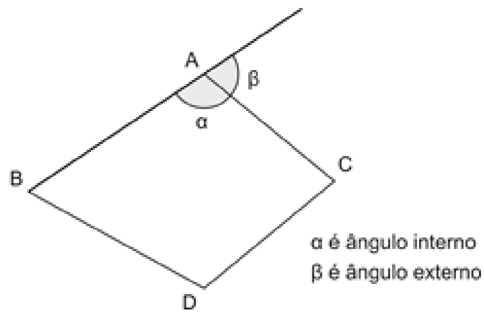
JUSTIFICATIVA

AOA' → colineares
AO = *A'O*
A' é simétrico ao ponto *A* em relação ao ponto *O*.

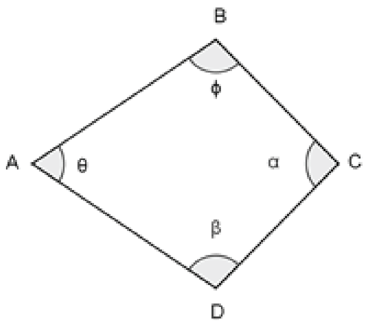
3.5 Polígonos

Polígono é a figura plana, fechada, formada por segmentos de reta consecutivos e não colineares, mais a sua área interna.

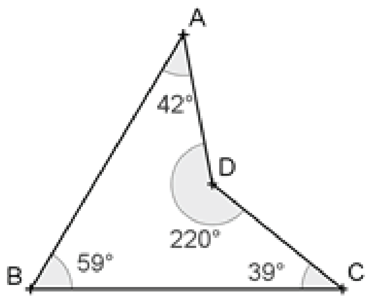
- O **ângulo interno** de um polígono é o ângulo dentro do polígono formado por dois lados consecutivos.
- O **ângulo externo** de um polígono é o ângulo fora do polígono formado entre um lado e o prolongamento do lado consecutivo.



Polígono convexo é aquele em que todos os ângulos internos são menores que 180º.

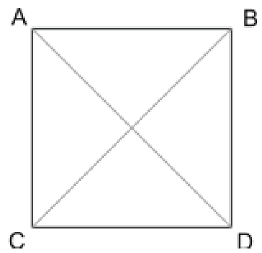


Polígono côncavo é aquele em que pelo menos um dos ângulos internos é maior que 180º.



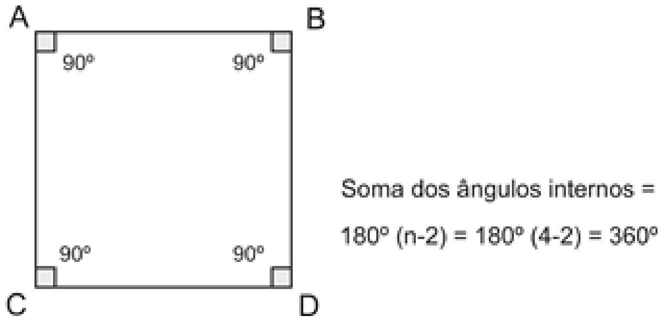
Polígono regular é aquele em que todos os lados e todos os ângulos são iguais, sendo ele equilátero e equiângulo.

$$\frac{n(n-3)}{2}$$



Nº de diagonais $= \frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = 2$

O **número de diagonais** de um polígono convexo de *n* lados é igual a .
A soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados é igual a 180 (n - 2).



3.6 Triângulos

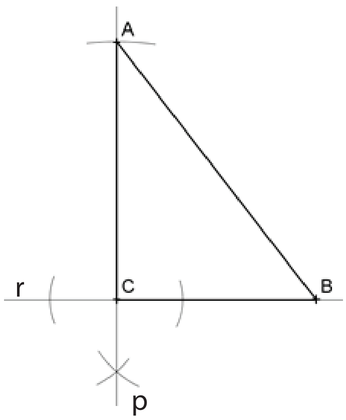
Dentre os polígonos, o estudo dos triângulos destaca-se e é de fundamental importância para o Desenho Geométrico por apresentar uma série de propriedades específicas.

O triângulo é o polígono que apresenta o menor número de lados e é resultado da interligação de três segmentos de reta consecutivos e não colineares. Para que três segmentos de reta, *AB*, *BC* e *AC*, formem um triângulo, é necessário que:

- $AB + BC > AC$
- $AB - BC < AC$

A forma e o tamanho de um triângulo ficam determinados quando se conhecem os tamanhos de pelo menos três elementos do triângulo (lados, ângulos, medianas, alturas, razão entre dois lados etc.), sendo que um desses elementos conhecidos deve ser um comprimento.

a. Dados os segmentos $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm e $BC = 3$ cm, traçar um triângulo retângulo, considerando o ângulo reto com vértice em *C*.



CONSTRUÇÃO

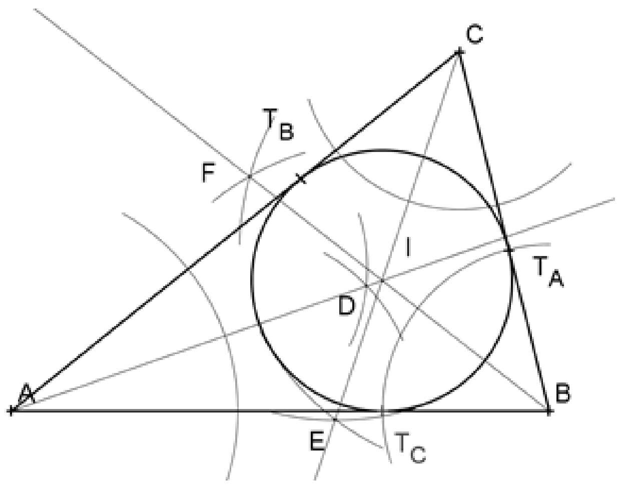
Traçar uma reta *r* e uma reta *p* perpendicular à *r*, no ponto *C*. Com centro em *C*, e raio de medida igual ao segmento *BC*, definir o ponto *B* na reta *r*. Com centro em *C* e raio de medida igual ao segmento *AC*, definir o ponto *A* sobre a reta *p*. Traçar o triângulo *ABC*.

Nos itens seguintes, serão apresentados elementos como pontos, linhas e círculos associados às propriedades dos triângulos.

Bissetrizes de um triângulo

As bissetrizes de um triângulo correspondem aos segmentos de reta que têm origem em cada vértice dos ângulos do triângulo, dividindo esses ângulos em dois ângulos congruentes. Portanto, em um triângulo há três bissetrizes internas, sendo que o ponto de interseção por elas determinado é chamado de **incentro (*I*).**

A circunferência que tem o incentro como centro e é tangente aos três lados do triângulo é denominada **circunferência inscrita** no triângulo.

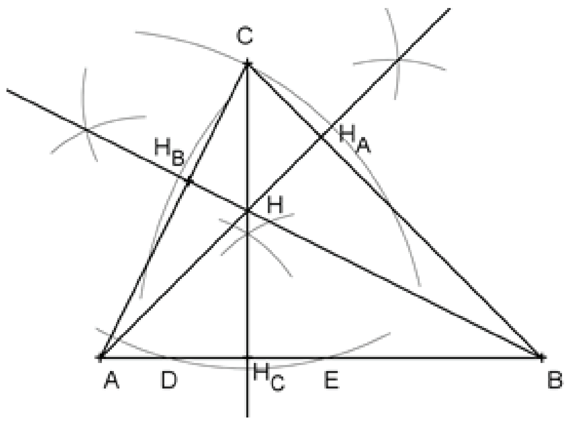


CONSTRUÇÃO

Para determinar o incentro é necessário traçar as bissetrizes dos três vértices do triângulo. O encontro das bissetrizes será o **incentro *I***. Para encontrar os pontos de tangência, T_A T_B e T_C da circunferência inscrita com os lados do triângulo, é preciso traçar uma perpendicular a cada lado do triângulo, que passe pelo incentro. Os pontos de interseção entre cada perpendicular e o respectivo lado do triângulo serão os pontos de tangência da **circunferência inscrita** no triângulo.

Alturas de um triângulo

Altura é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, que contenha o vértice oposto ao lado referido. Esse lado é chamado base da altura. O ponto de interseção das três alturas de um triângulo é denominado **ortocentro (*H*)**.



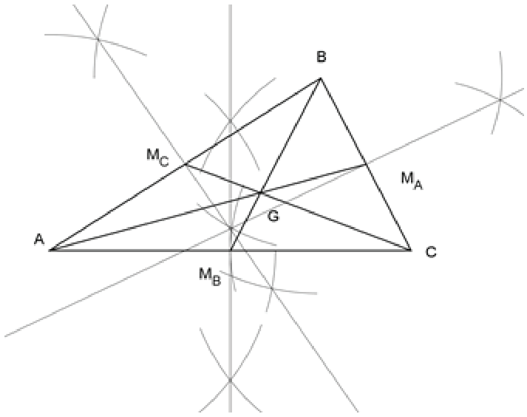
CONSTRUÇÃO

Para determinar o ortocentro é necessário traçar as alturas referentes a cada um dos vértices do triângulo. Para encontrar a altura referente ao vértice *C*, por exemplo, deve-se traçar um arco com centro em *C* e raio maior que a distância de *C* até *AB,* determinando os pontos *D* e *E*. Então, traçar a mediatriz de *DE* definindo o ponto H_c. O segmento de reta CH_c é a altura relativa ao vértice *C*. Repetir a operação considerando os outros vértices e determinando as outras alturas do triângulo.

Medianas de um triângulo

Mediana é o segmento de reta que une cada vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. A mediana relativa à hipotenusa em um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.

O ponto de interseção das três medianas é o **baricentro** ou centro de gravidade do triângulo **(*G*)**. O baricentro divide a mediana em dois segmentos proporcionais: o segmento que une o vértice ao baricentro mede o dobro do segmento que une o baricentro ao lado oposto deste vértice. Assim, o baricentro divide a mediana na proporção 2:1, ou seja, sendo *A* o vértice: $AG/GM_A=2/1$.

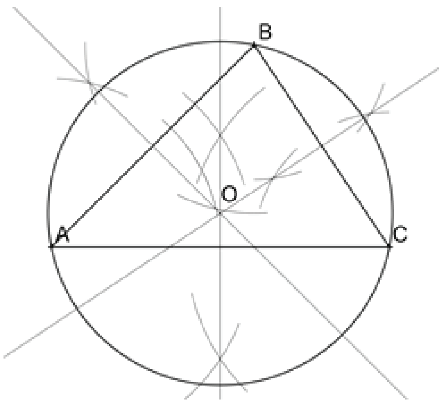


CONSTRUÇÃO

Para determinar o baricentro é necessário traçar as medianas do triângulo. Para isso, deve-se definir os pontos médios M_A M_B e M_C de cada lado do triângulo e unir os vértices do triângulo aos pontos médios dos seus respectivos lados opostos. O ponto de interseção das medianas é o baricentro do triângulo.

Mediatrizes de um triângulo

A interseção das mediatrizes relativas aos três lados do triângulo determina o **circuncentro (*O*)**. Como o ponto *O* é equidistante dos três vértices do triângulo, ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.



CONSTRUÇÃO

Para determinar o circuncentro é necessário traçar as mediatrizes de cada lado do triângulo. A interseção das mediatrizes define o circuncentro *O*. Com o compasso com centro em *O* e raio até um dos vértices do triângulo traçar a circunferência circunscrita a ele.

3.7 Circunferências

A circunferência é a linha curva, plana, fechada, definida pelos pontos equidistantes de um ponto fixo chamado de **centro *(O)***.

O círculo é a parte do plano interna à circunferência e por ela delimitada.

O **Quadro 1** apresenta as posições relativas entre uma circunferência e uma reta; e o **Quadro 2** apresenta as posições relativas entre duas circunferências.

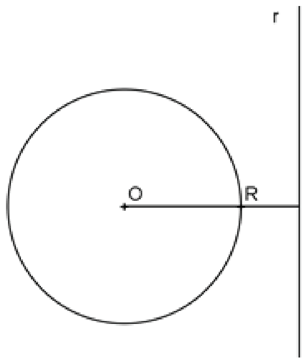
Quadro 1 Posições relativas entre uma circunferência e uma reta

Posições relativas entre uma circunferência e uma reta

EXTERIORES

Or > OR

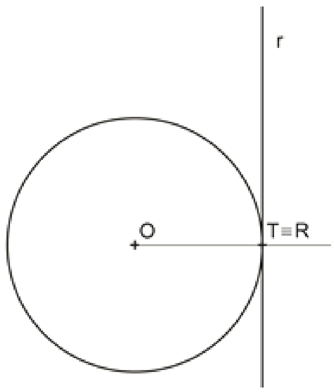
Uma circunferência e uma reta são exteriores quando não têm nenhum ponto em comum.



TANGENTES

Or = OR

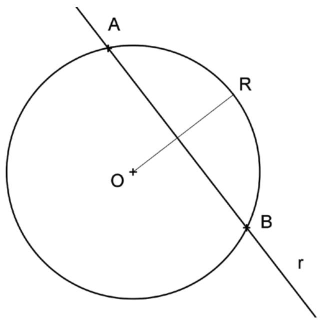
Uma reta e uma circunferência são tangentes quando possuem um único ponto em comum (ponto de tangência T). Ao ligarmos o centro da circunferência ao ponto de tangência, temos o segmento *OT* igual ao raio da circunferência e perpendicular à reta tangente *r*.



SECANTES

Or < OR

Uma reta e uma circunferência são secantes quando possuem dois pontos em comum.



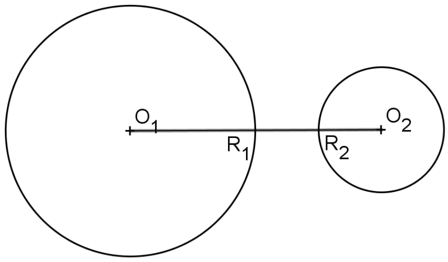
Quadro 2 Posições relativas entre duas circunferências

Posições relativas entre duas circunferências

EXTERIORES

$O_1O_2 > R_1 + R_2$

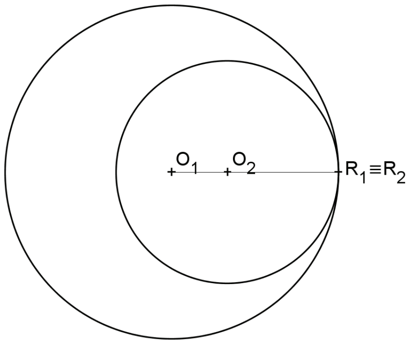
Duas circunferências são exteriores quando não possuem pontos em comum.



TANGENTES INTERNAS

$O_1O_2 = O_1R_1 - O_2R_2$

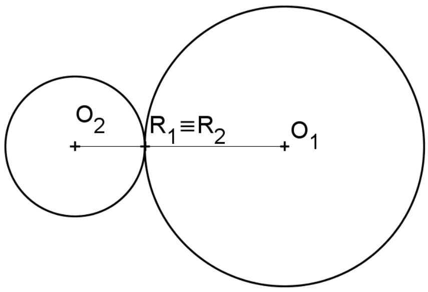
Duas circunferências são tangentes internas quando possuem apenas um ponto em comum, que é um ponto de tangência, e a distância entre os centros das circunferências é igual à diferença entre raios.



TANGENTES EXTERNAS

$O_1O_2 = O_1R_1 + O_2R_2$

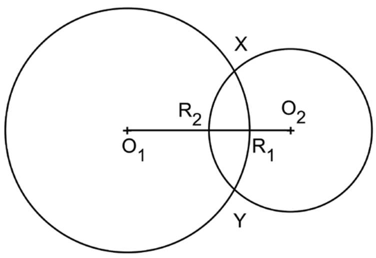
Duas circunferências são tangentes externas quando possuem apenas um ponto em comum, que é um ponto de tangência, e a distância entre os centros das circunferências é igual à soma dos raios.



SECANTES

$O_1O_2 < O_1R_1 + O_2R_2$

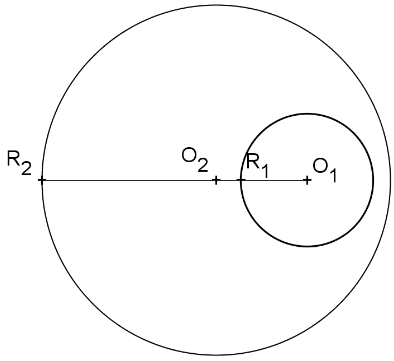
Duas circunferências são secantes quando possuem dois pontos em comum.



INTERNAS EXCÊNTRICAS

$O_1O_2 < O_1R_1 - O_2R_2$

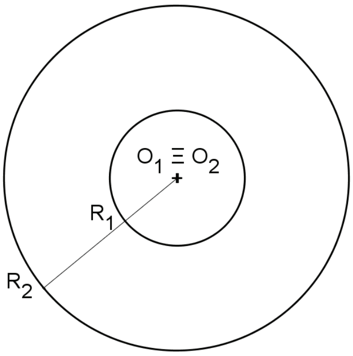
Duas circunferências internas excêntricas não se interceptam em nenhum ponto, possuem centros distintos e a distância entre seus centros é menor que a diferença entre seus respectivos raios.



INTERNAS CONCÊNTRICAS

$O_1 \equiv O_2$ e $O_1R_1 \neq O_2R_2$

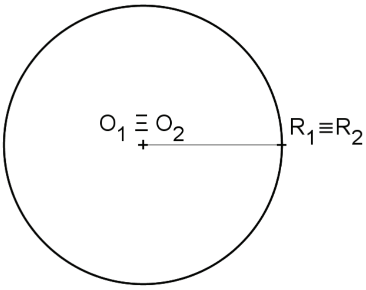
Duas circunferências internas concêntricas não se interceptam em nenhum ponto, sendo que seus centros são coincidentes e os raios distintos.



COINCIDENTES

$O_1 \equiv O_2$ e $O_1R_1 = O_2R_2$

Duas circunferências são coincidentes quando possuem o mesmo raio e os centros são coincidentes.



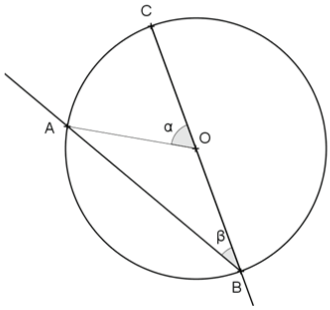
Ângulos inscritos em uma circunferência

Um ângulo β está inscrito em uma circunferência quando tem o vértice na circunferência e os lados são ambos secantes ou um secante e o outro tangente a ela.

O ângulo α é denominado de ângulo central correspondente ao ângulo β inscrito, sendo $\alpha = 2\beta$.

Nos itens abaixo estão representadas quatro diferentes situações possíveis para a aplicação da propriedade $\alpha = 2\beta$.

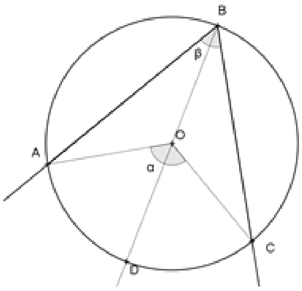
I. Um dos lados do ângulo inscrito contém o centro da circunferência



JUSTIFICATIVA

O ΔOAB é isósceles, pois $AO = OB$ = raio.
Logo, $\angle ABO = \angle BAO$.
$\angle AOC$ é externo ao ΔOAB.
Então, $\angle AOC = \angle ABO + \angle BAO$
Ou $\alpha = 2\beta$.

II. O centro da circunferência é interno ao ângulo inscrito

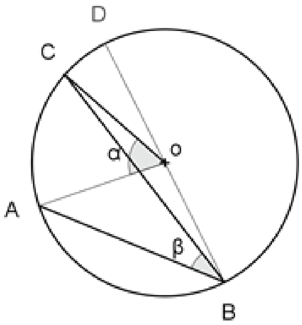


JUSTIFICATIVA

Traçando uma reta pelo centro da circunferência e pelo vértice do ângulo inscrito, obtemos obtemos dois triângulos na condição do primeiro item, onde:
$\angle AOD = 2\angle ABD$ e $\angle DOC = 2\angle DBC$

Logo,
$\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC = 2(\angle ABD + \angle DBC) = 2\angle ABC$

III. O centro da circunferência é externo ao ângulo inscrito

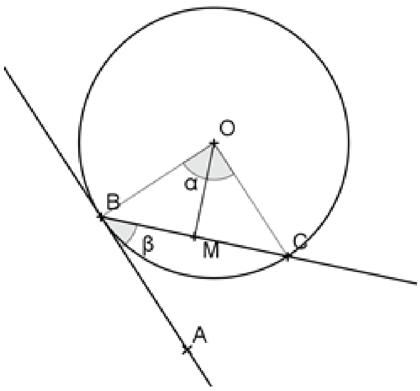


JUSTIFICATIVA

Traçando uma reta pelo centro da circunferência e pelo vértice do ângulo inscrito, obtemos dois triângulos na condição do primeiro item, onde:
$\angle AOD = 2\angle ABD$
$\angle COD = 2\angle CBD$

Logo,
$\angle AOC = \angle AOD - \angle COD = 2(\angle ABD - \angle CBD) = 2\angle ABC$

IV. Um lado do ângulo inscrito é tangente à circunferência



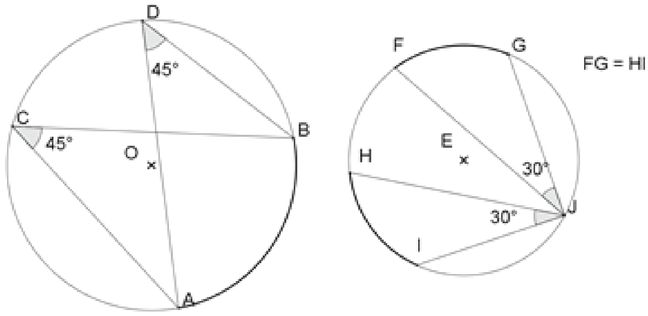
JUSTIFICATIVA

OM é a altura do triângulo relativa ao lado BC. Logo, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle BOM$ são complementares do $\angle OBM$.
$\angle ABC + \angle OBM = 90°$
$\angle BOM + \angle OBM = 90°$
Portanto, $\angle ABC = \angle BOM$
O ΔBOC é isósceles, então,
$\angle BOM = \angle BOC/2$.

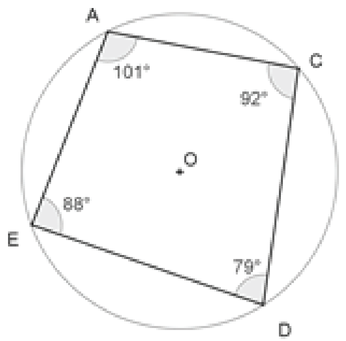
Logo, $\angle BOC = 2\ \angle ABC$.

Nos itens seguintes, estão representadas três outras propriedades comuns de figuras geométricas inscritas em circunferências.

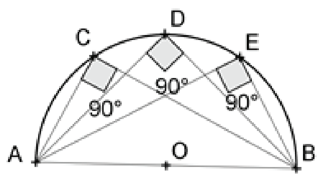
I. Os ângulos inscritos em uma circunferência que interceptam o mesmo arco ou arcos iguais são iguais.



II. Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em uma circunferência são suplementares.



III. Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.



Tangência

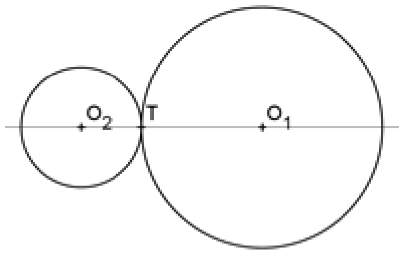
Uma circunferência é tangente a uma reta ou a outra circunferência, quando existe somente um ponto comum aos dois entes geométricos envolvidos.

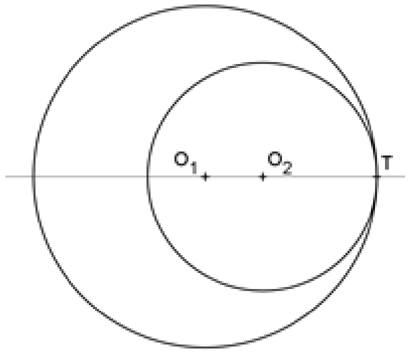
Em Desenho Geométrico, chama-se de caso de tangência todo problema de construção de uma ou mais circunferências satisfazendo à condição de tangenciar retas e/ou circunferências dadas.

É importante ressaltar que, na resolução dos problemas de tangência, **devem ser determinados todos os pontos de tangência**, mesmo que não sejam necessários todos eles para a determinação das circunferências procuradas.

4.1 Circunferências tangentes

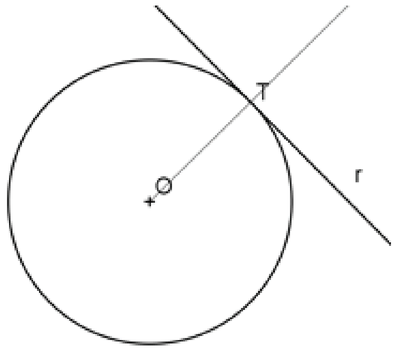
Quando duas circunferências são tangentes, os seus centros e o ponto de tangência *T* entre elas são sempre colineares.





4.2 Reta tangente a uma circunferência

A cada reta tangente a uma circunferência corresponde um raio que lhe é perpendicular. Desta forma, para construir uma reta tangente a uma circunferência é necessário que o ponto de tangência e o centro da circunferência estejam sobre uma mesma que deve ser reta perpendicular à reta tangente.



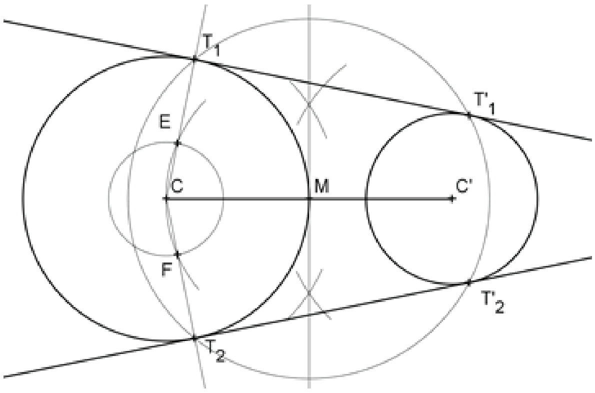
CONSTRUÇÃO

Dados uma circunferência de centro *O* e um ponto *T* pertencente à circunferência. Para construir uma reta tangente a essa circunferência passando pelo ponto *T*, basta traçar o raio *OT* e em seguida construir uma perpendicular a *OT* passando por *T*.

4.3 Retas tangentes a duas circunferências

As retas tangentes a duas circunferências podem ser tangentes internas ou externas.

Tangentes externas



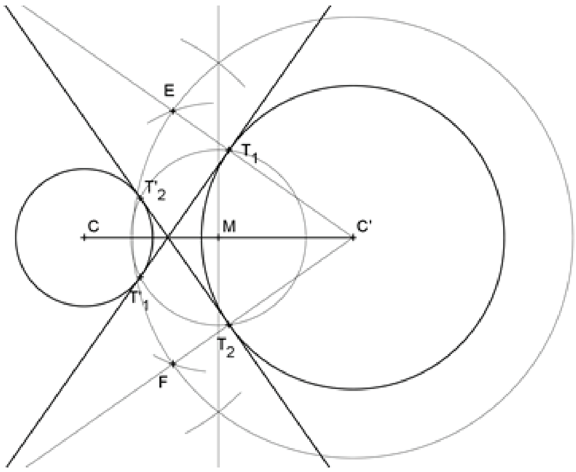
JUSTIFICATIVA

Os ângulos $\angle CEC'$ e $\angle CFC'$ são iguais à 90° pois estão inscritos na semicircunferência de centro *M* e raio *MC*.
Sendo $FC' \parallel T_2T_2'$ e $EC' \parallel T_1T_1'$, logo os ângulos $\angle CT_1T_1'$ e $\angle CT_2T_2'$ também são iguais a 90°.
Note que $FC' = T_2T_2'$ e que $EC' = T_1T_1'$.

CONSTRUÇÃO

Com centro em *C*, traçar uma circunferência cujo raio é a diferença ($r - r'$). Traçar segmento CC' e definir *M* como seu ponto médio. Com centro do compasso em *M* e raio *MC*, definir os pontos *E* e *F* na interseção com a circunferência de raio ($r - r'$). Traçar uma reta contendo os pontos *C* e *E* e outra reta contendo os pontos *C* e *F* até a interseção com a circunferência de raio *r*, definindo os pontos T_1 e T_2. Com centro em *M* e raio MT_1 definir os pontos T_1' e T_2'. Unir os pontos T_1 e T_2 aos pontos T_1' e T_2', respectivamente.

Tangentes Internas



JUSTIFICATIVA

Os ângulos $\angle CEC'$ e $\angle CFC'$ são iguais à 90° pois estão inscritos na semicircunferência de centro *M* e raio *MC*.
Note que $CE \parallel T_1T_1'$ e $CF \parallel T_2T_2'$.

CONSTRUÇÃO

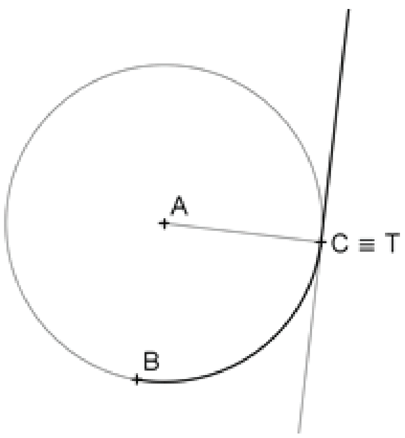
Com centro em *C'*, traçar uma circunferência cujo raio é a soma $(r + r')$. Traçar segmento *CC'* e definir *M* como seu ponto médio. Com centro em *M* e raio *MC*, definir os pontos *E* e *F* na interseção com a circunferência de raio $(r + r')$. Traçar uma reta que passe pelos pontos *C'* e *E*, e outra reta que passe pelos pontos *C'* e *F*, definindo na interseção com a circunferência de raio *r*, respectivamente os pontos T_1 e T_2. Com centro em *M* e raio MT_1 definir os pontos T_1' e T_2'. Unir os pontos T_1 e T_2 aos pontos T_1' e T_2', respectivamente.

Concordância

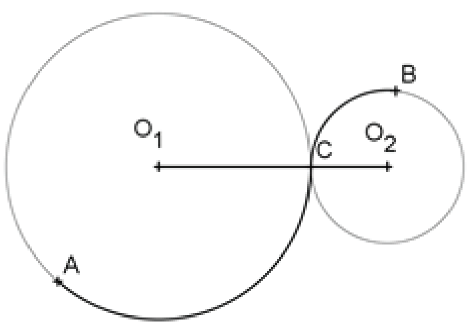
Diz-se que duas linhas, dois arcos, ou um arco e uma semi-reta, são concordantes, quando são tangentes e há suavidade na continuidade de um ente geométrico para outro.

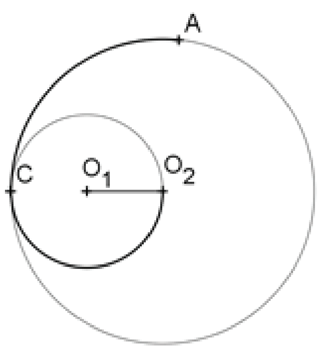
5.1 Princípios fundamentais de concordância

Para concordar um **arco e uma reta**, é necessário que o ponto de concordância e o centro do arco estejam ambos sobre uma mesma perpendicular à reta concordante. Nota-se que a reta concordante ao arco é tangente à circunferência relativa a ele no ponto de concordância. Sendo assim, o ponto de concordância coincide com o ponto de tangência.



Para concordar **dois arcos**, o ponto de concordância e os centros dos arcos devem ser colineares.



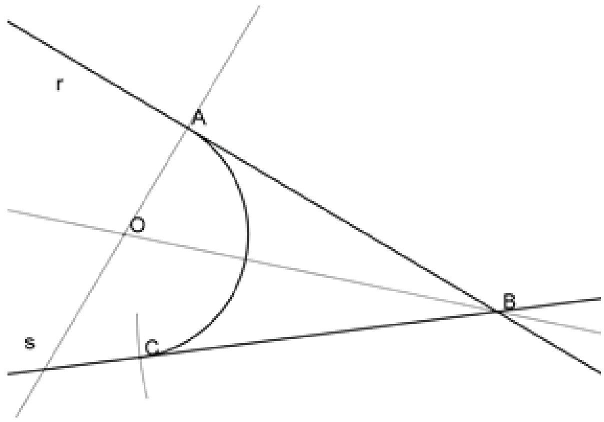


5.2 Aplicações dos princípios de concordância

Os princípios de concordância são utilizados para traçados de calçadas, ruas e rodovias; é preciso haver concordância em vias que são perpendiculares ou oblíquas entre si, de tal modo que a curva atenda às limitações dos raios de giro dos veículos e para que haja suavidade na conversão do motorista.

Projetos arquitetônicos e paisagísticos muitas vezes valem-se de traçados orgânicos e curvos. A correta execução de tais traçados depende da definição exata de parâmetros do Desenho Geométrico.

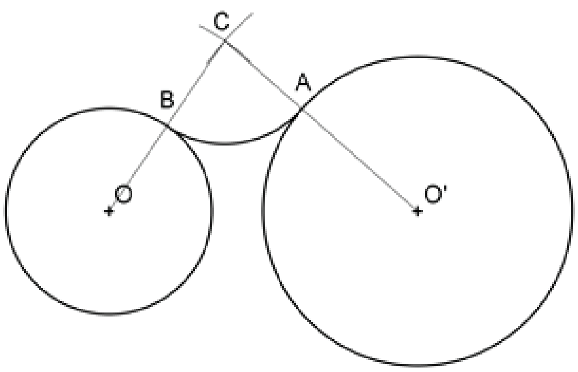
a. Concordar a reta dada *r* com a reta dada *s* no ponto *A* por meio de um arco.



CONSTRUÇÃO

Por *A* traçar a perpendicular à ***r*.** Prolongar *s* até encontrar *r* determinando o ponto *B* na interseção. Com centro em *B* e raio *BA* obter *C*, ponto de concordância em *s*. A bissetriz do ângulo *ABC* encontra a perpendicular traçada em *O*, centro do arco procurado.

b. Concordar dois arcos dados, de centros *O* e *O'*, e raios *R* e *R'*, por meio de outro arco de raio *r*.



CONSTRUÇÃO

Com centro em *O* e raio *(R + r)* e centro em *O'* e raio (*R' + r*), obtemos o centro *C* do arco concordante procurado. Unir *C* a *O* e *O'*, obter os pontos de concordância *A* e *B*. Traçar o arco com centro em *C* e raio *CA*.

Métodos de estudo dos problemas de Desenho Geométrico

O estudo dos métodos tem como objetivo determinar o caminho lógico, por meio de um processo dedutivo-analítico, que permite a resolução de problemas desconhecidos de Desenho Geométrico. Os vários métodos apresentados podem ser utilizados isoladamente, entretanto, na prática, utilizamos uma combinação de vários métodos.

6.1 Método algébrico

Deve ser utilizado nos casos em que a resolução somente pode ser deduzida algebricamente, como em alguns problemas de equivalência.

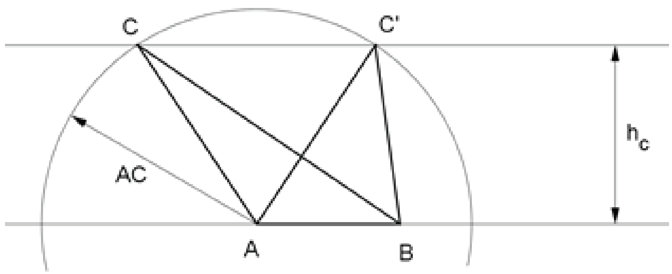
6.2 Método prático

O método prático consiste em supor o problema resolvido fazendo um rascunho, no qual todos os dados são indicados e também uma resposta qualquer, não particular, do problema. A seguir, identificam-se os pontos notáveis do problema e estuda-se como chegar até ele. Este método é normalmente utilizado em combinação com outro método.

6.3 Método da redução a problemas conhecidos

Este método consiste em dividir o problema em partes, cujas soluções sejam conhecidas.

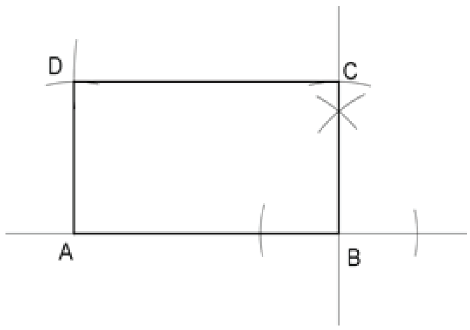
a. Construir um triângulo *ABC*, sendo dados *AB*, *AC* e h_c.



6.4 Método da analogia

A resolução é feita pela comparação com um problema análogo.

a. Para construir um retângulo procede-se de forma análoga à utilizada para construir um quadrado.



6.5 Método dos lugares geométricos

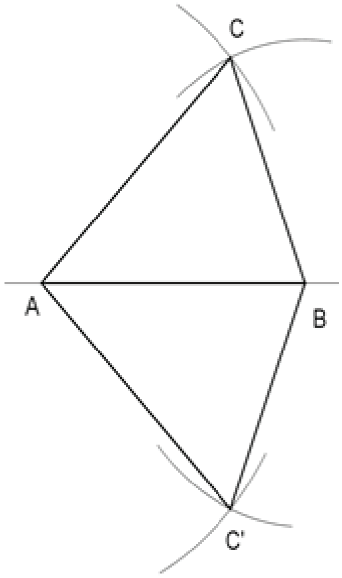
Ao resolver um problema de Desenho Geométrico, procura-se por uma determinada figura que atenda a todas as condições impostas. A figura procurada pode ser um ponto, uma linha (reta ou curva), ou ainda, um conjunto de linhas.

Como as linhas e os conjuntos de linhas são formados por pontos que devem atender a determinadas condições, o problema pode ser, então, reduzido à pesquisa dos pontos que atendem a estas condições. Deste modo, quando o problema é reduzido à determinação de um ponto, o enunciado pode ser reescrito como sendo:

Obter um ponto, tal que:
I) o ponto tem a propriedade 1, e
II) o ponto tem a propriedade 2.

a. Construir um *ΔABC*, dados *AB*, *AC* e *BC*.
Obs.: Fixando *AB*, determinar um ponto *C,* tal que:
I) C dista AC de A, e
II) C dista BC de B.

A resposta ao problema será “um” ponto que atende simultaneamente às duas propriedades.



Tomando as propriedades isoladamente, por exemplo, a propriedade "*C* dista *AC* de *A*", verificamos que os pontos que têm esta propriedade em comum formam uma circunferência.

Ao conjunto de pontos que tem uma propriedade comum damos o nome de LUGAR GEOMÉTRICO (LG), cuja definição é o conjunto de pontos que possui pelo menos uma propriedade comum e exclusiva.

Desta forma, no exemplo do *ΔABC*, a resposta pode ser obtida pela interseção de dois LGs, que são os pontos que têm as duas propriedades em comum.

Os principais lugares geométricos

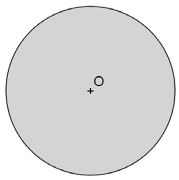
7.1 Tipos de LG

Os lugares geométricos podem ser divididos em três tipos:

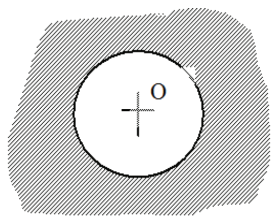
a) Um ponto,

b) Uma linha, reta ou arco de circunferência,

c) Uma figura. Exemplo I. Pontos que distam menos do que 2 cm de *O*.
Exemplo II. Pontos que distam mais do que 2 cm de *O*.



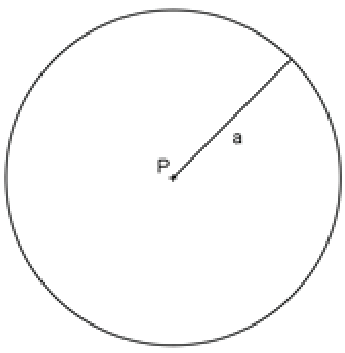
Exemplo I. OX < 2 cm



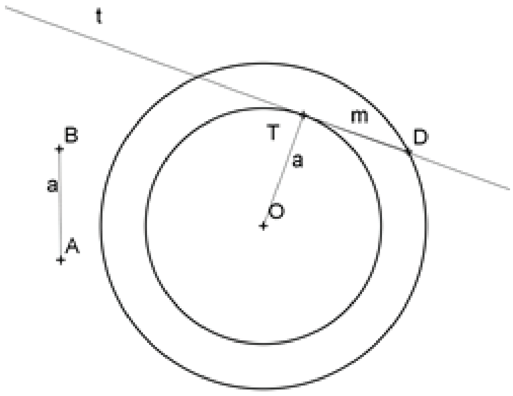
Exemplo II. OX < 2 cm

7.2 LG 1 – Circunferência

O LG dos pontos que estão a uma distância *a* de um ponto *P* é a circunferência de centro *P* e raio *a*.



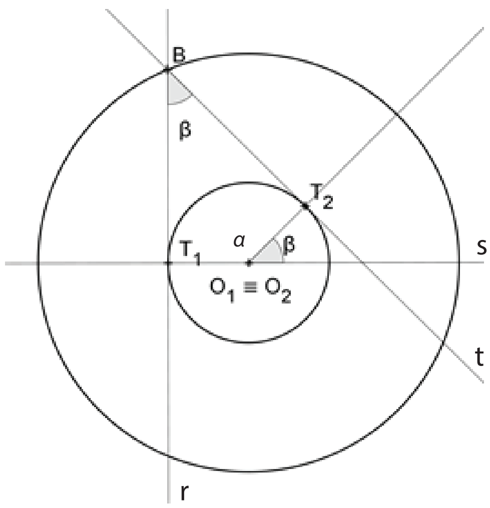
Caso notável 1. O LG dos pontos *P* tais que as tangentes a uma circunferência conhecida, por eles conduzida, têm comprimento *m* constante conhecido, é uma circunferência.



CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *t* tangente à circunferência. Com centro em *T* e raio igual a *m,* traçar um arco obtendo assim *D*. Com raio *OD* e centro em *O,* traçar a circunferência procurada.

Caso notável 2. O LG dos pontos *P* que veem uma circunferência sob um ângulo *β* é uma circunferência.

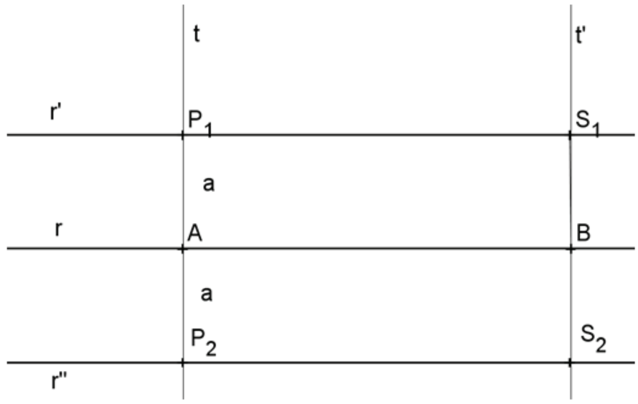


CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta s passando por O_1, centro da circunferência. Na interseção da reta s com a circunferência determinar o ponto T_1. Traçar, a partir de *s*, um ângulo *β* com centro em O_1 que seja igual a $\beta = [360º - \alpha - (2 \times 90º)]$. Na interseção da circunferência com a reta que define o ângulo *β*, marcar T_2. Traçar uma reta *t*, tangente à circunferência, que passe por T_2. Na interseção das retas *r* e *t* definir o ponto *B*. Com o compasso em O_1 e abertura O_1B, traçar a circunferência O_2.

7.3 LG 2 – Retas paralelas

O LG dos pontos *P* que estão a uma distância *a* de uma reta *r* é o par de retas *r′* e *r″* paralelas à *r* com distância igual à *a*.

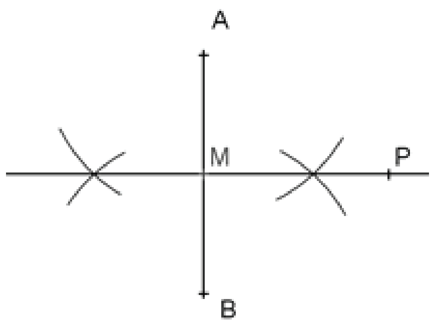


CONSTRUÇÃO

Dada a reta *r*, traçar duas retas perpendiculares à *r*. Nomear as perpendiculares de *t* e *t′*. A partir do ponto de interseção de cada perpendicular com a reta *r*, marcar com compasso, sobre cada perpendicular a distância *a*, abaixo e acima de *r*. Nomear os pontos definidos acima de *r* de P_1, na reta *t* e S_1 na reta *t′*. Nomear os pontos definidos abaixo de *r* de P_2 na reta *t* e S_2 na reta *t′*. Traçar uma reta unindo os pontos P_1 e S_1, e outra reta unindo os pontos e P_2 e S_2.

7.4 LG 3 – Reta mediatriz

O LG dos pontos *P* equidistantes de dois pontos *A* e *B* é a reta mediatriz do segmento, cujas extremidades são esses dois pontos.

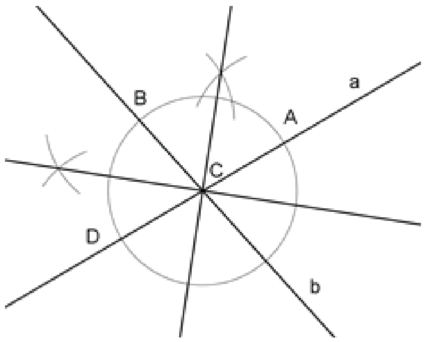


CONSTRUÇÃO

Traçar a mediatriz do segmento *AB*.

7.5 LG 4 – Reta bissetriz

O LG dos pontos *P* equidistantes de duas retas *a* e *b* concorrentes conhecidas é o par de retas *c* e *d* que são bissetrizes dos ângulos formados.



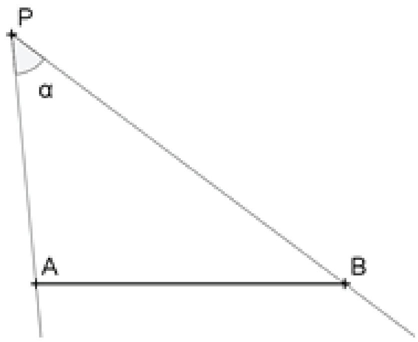
CONSTRUÇÃO

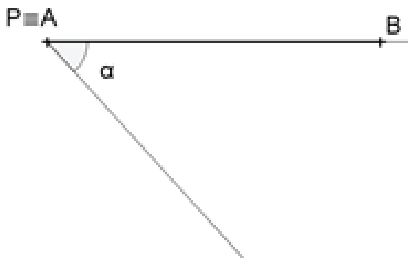
Definir o ponto *C* a partir da interseção das retas *a* e *b*. Com centro em *C* e raio qualquer, traçar uma circunferência. Definir os pontos *A*, *B* e *D* e traçar a retas bissetrizes dos ângulos ACB e BCD.

Caso notável. O LG dos pontos equidistantes de duas retas paralelas t_1 e t_2 conhecidas é uma terceira reta *s* paralela e equidistante de t_1 e t_2.

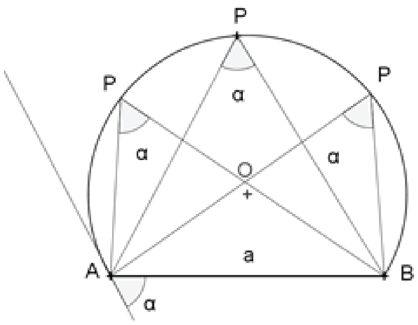
7.6 LG 5 – Arco capaz

Diz-se que um ponto *P* vê um segmento *AB* sob um ângulo α, quando *P* é o vértice de um ângulo igual a α cujos lados contêm *A* e *B*.



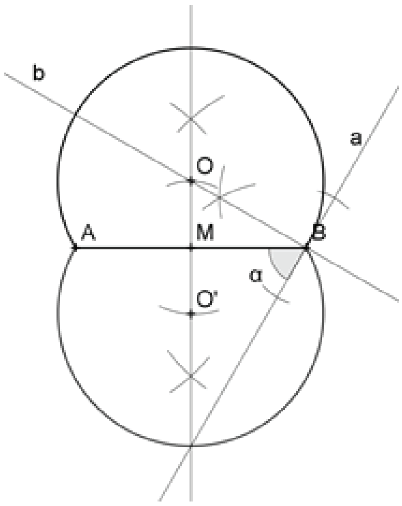


Assim, o LG dos pontos *P* que veem um segmento, de extremidades *A* e *B* conhecidas, sob um ângulo *α* de tamanho conhecido é o par de arcos capazes do ângulo, construídos sobre o segmento.



Algumas propriedades do arco capaz:

- O centro do arco capaz pertence à reta mediatriz do segmento *AB*.
- Se um dos lados do ângulo inscrito é tangente à circunferência, o centro do arco capaz pertence à reta perpendicular ao lado tangente que passa pelo ponto de tangência.
- Os dois arcos capazes são simétricos em relação ao segmento *AB*.



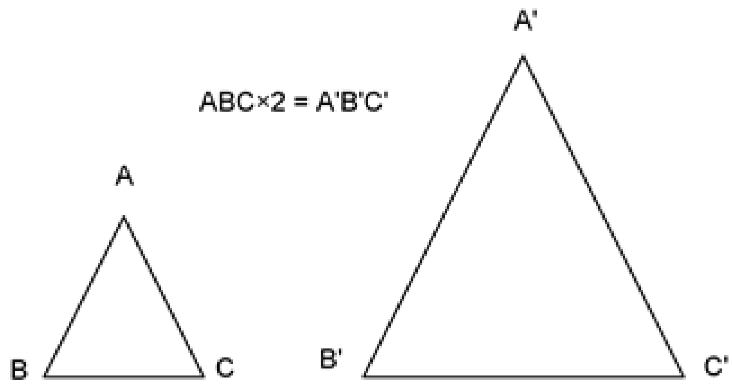
CONSTRUÇÃO

Traçar o segmento de reta *AB*. Pelo ponto *B* traçar uma reta *a* que forme com o segmento *AB* o ângulo determinado. Traçar uma reta *b* perpendicular à reta *a*, que passe ponto *B*. Determinar o ponto médio *M* do segmento *AB*. Traçar uma reta perpendicular ao segmento *AB*, que passe pelo ponto *M*. Definir o ponto *O* na interseção entre a reta *b* e a reta mediatriz de *AB* no plano superior ao segmento AB. Definir o ponto *O′* simétrico ao ponto O em relação ao ponto M.
Para ângulos menores que 90º, com o compasso centrado no ponto *O* e abertura *OA*, traçar o arco de circunferência no plano acima do segmento *AB* e com o compasso centrado no ponto *O′* e abertura *O′A*, traçar o arco de circunferência no plano **abaixo** do segmento *AB*.
Para ângulos maiores que 90º, com o compasso centrado no ponto *O* e abertura *OA*, traçar o arco de circunferência no plano abaixo do segmento *AB* e, com o compasso centrado no ponto *O′* e abertura *O′A*, traçar o arco de circunferência no plano acima do segmento *AB*.

Caso notável. O LG dos pontos que veem um segmento de extremidades conhecidas, sob um ângulo reto, é a circunferência que tem esse segmento para diâmetro.

Segmentos proporcionais

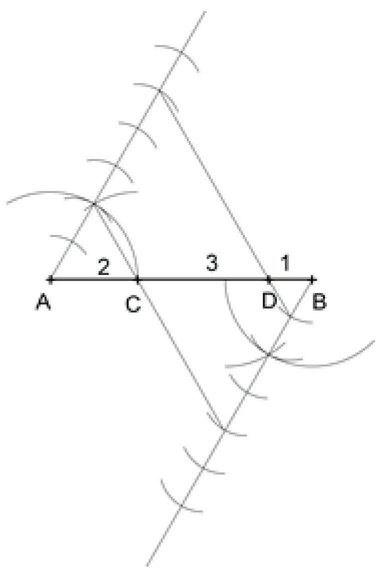
A construção de segmentos proporcionais baseia-se nas *figuras semelhantes*, ou seja, aquelas que têm a mesma forma, mas não obrigatoriamente o mesmo tamanho. Assim, podemos afirmar que dois polígonos são semelhantes quando os seus ângulos são ordenadamente iguais e os lados homólogos têm a mesma razão.



8.1 Divisão de segmentos

A divisão de um segmento em partes proporcionais a números ou a segmentos dados pode ser feita por dois processos.

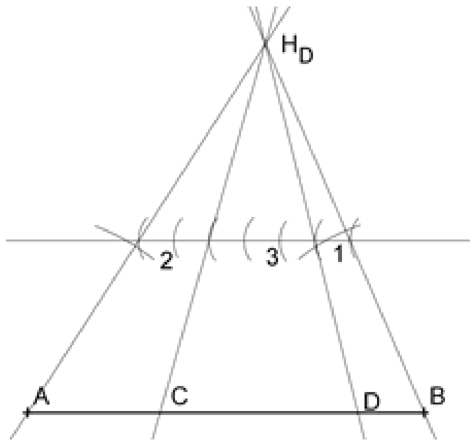
1º Processo: Dividir um segmento *AB* na proporção 2:3:1, pelo processo das retas paralelas.



CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta com ângulo qualquer, no plano superior do segmento *AB*, que passe por *A*. Transferir o ângulo formado para o ponto *B* no plano inferior de *AB*. Com o centro do compasso em *A*, raio qualquer, traçar 6 arcos (6 = 2 + 3 + 1) sequenciais. Mantendo o mesmo raio do compasso, a partir de *B*, reproduzir a medida por 6 vezes, sendo que a sequência da contagem a partir do ponto *B* será de 1 + 3 + 2. Traçar retas unindo os pontos correspondentes às proporções 2, 3 e 1.

2º Processo: Dividir um segmento *AB* na proporção 2:3:1, pelo processo do centro de homotetia.



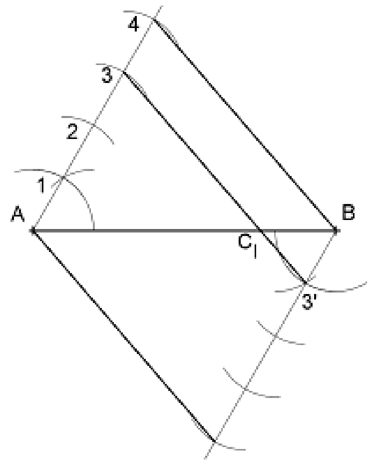
CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta qualquer paralela ao segmento *AB*. Definir uma dimensão no compasso e reproduzi-la no segmento paralelo à *AB* de forma consecutiva na proporção 2:3:1. Traçar uma reta por *A* e pelo ponto mais à esquerda definido sobre a reta paralela. Traçar uma reta por *B* e pelo ponto mais à direita definido sobre a reta paralela. Definir o ponto H_D na interseção entre as útimas retas traçadas. Unir o ponto H_D aos pontos que definem a proporção 2:3:1 na reta paralela até interceptar o segmento *AB*. Desta forma, os segmentos *AC*, *CD* e *DB* dividem o segmento *AB* em partes proporcionais a 2:3:1, respectivamente.

8.2 Divisão harmônica

É a divisão de um segmento interna e externamente na razão k = *m/n*, sendo *m* e *n* números ou segmentos.

Exemplo: Dados o segmento AB e k = 3/1.
Divisão interna:



JUSTIFICATIVA

$AB = m + n$
$AB = 3 + 1 = 4$

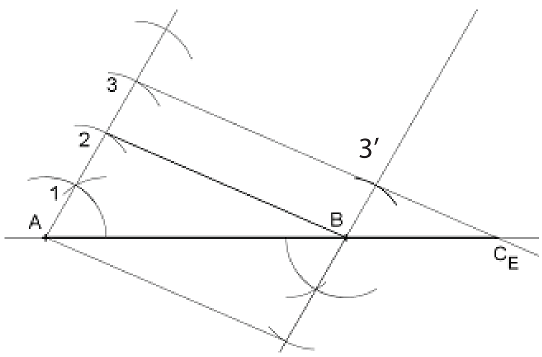
$$K = \frac{m}{n} = \frac{AC_I}{BC_I} = \frac{3}{1}$$

$\Delta AC_I3 \sim \Delta BC_I3'$

CONSTRUÇÃO

Sendo $AB = m + n$, fazer a divisão do segmento AB em quatro partes iguais e consecutivas (4 = 3 + 1 partes), pelo método das retas paralelas. Na interseção da terceira parte com o segmento AB, marcar o ponto C_I.

Divisão externa:



JUSTIFICATIVA

$AB = m - n$
$AB = 3 - 1 = 2$

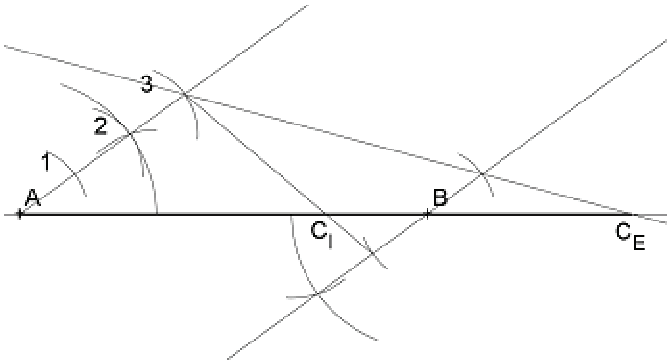
$$K = \frac{m}{n} = \frac{AC_E}{BC_E} = \frac{3}{1}$$

$\Delta AC_E3 \sim \Delta BC_E3'$

CONSTRUÇÃO

Sendo $AB = m\text{-}n$, pelo método das retas paralelas, traçar uma reta oblíqua por A. Transportar o ângulo de vértice A definido com o segmento AB para o ponto B com sentido inverso. A partir de A determinar três segmentos iguais e consecutivos sobre a reta oblíqua. Com mesmo raio, marcar sobre a outra reta oblíqua, a partir de B, um segmento à direita de B e dois segmentos consecutivos à esquerda de B. Unindo os pontos correspondentes para a divisão do segmento, determinar o ponto C_E na interseção do prolongamento de AB.

Construção simultânea:



CONSTRUÇÃO

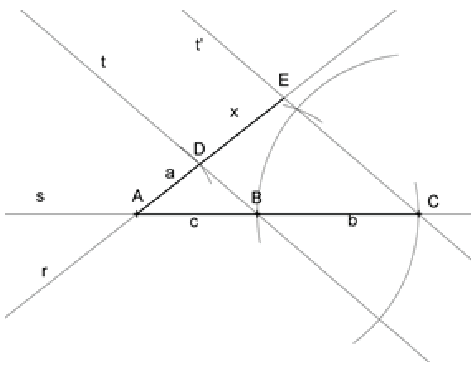
Pelo método das retas paralelas, fazer a divisão interna para definir C_I, e a divisão externa para definir C_E.

8.3 Quarta proporcional

Chama-se *Quarta Proporcional* de três segmentos, ao produto de dois deles dividido pelo terceiro. Logo, dados três segmentos *a, b* e *c*, existem três quartas proporcionais, *x, y* e *z*.

8.3.1 Quarta proporcional *x*

Resolução gráfica (Teorema de Tales):



Resolução algébrica:

$$x = \frac{a * b}{c} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{x}{b}$$

JUSTIFICATIVA

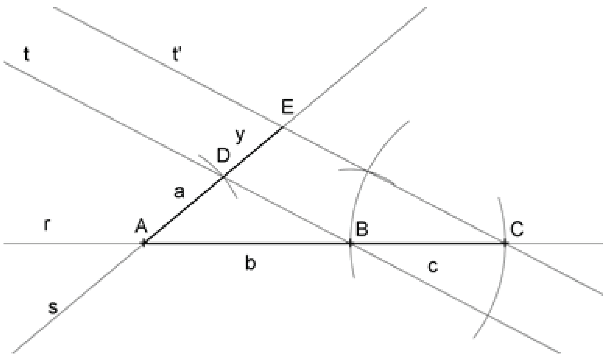
$\Delta ABD \sim \Delta ACE$

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *s*, e uma reta *r* concorrente à *s* que faça um ângulo qualquer com *s*. A partir de *A*, marcar o segmento *a* na reta *r* e os segmentos *c* e *b*, respectivamente, na reta *s*. Traçar reta *BD*, e em seguida traçar *CE* paralela à *BD* para definir o segmento *x*.

8.3.2 Quarta proporcional *y*

Resolução gráfica (Teorema de Tales):



Resolução algébrica:

$$y = \frac{a * c}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{y}{c}$$

JUSTIFICATIVA

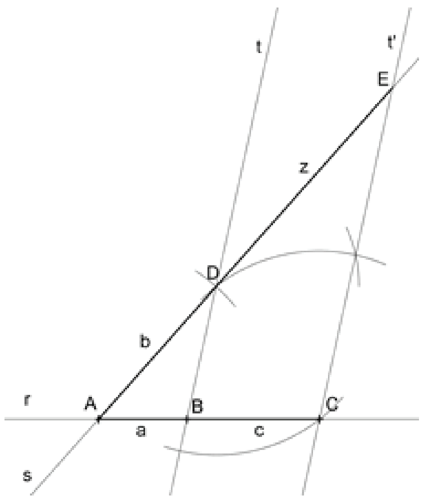
$\Delta ABD \sim \Delta ACE$

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *r*, e uma reta *s* concorrente à *r* que faça um ângulo qualquer com *r*. A partir de *A*, marcar o segmento *a* na reta *s* e os segmentos *b* e *c*, respectivamente na reta *r*. Traçar *BD*, e em seguida traçar *CE* paralela à *BD* para definir *y*.

8.3.3 Quarta proporcional *z*

Resolução gráfica (Teorema de Tales):



Resolução algébrica:

$$z = \frac{b * c}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{z}{c}$$

JUSTIFICATIVA

$\Delta ABD \sim \Delta ACE$

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *r*, e uma reta *s* concorrente à *r* que faça um ângulo qualquer com *r*. A partir de *A*, determinar o segmento *b* na reta *s* e os segmentos *a* e *c*, respectivamente, na reta *r*. Traçar *BD*, e em seguida traçar *CE* paralela à *BD* para definir *z*.

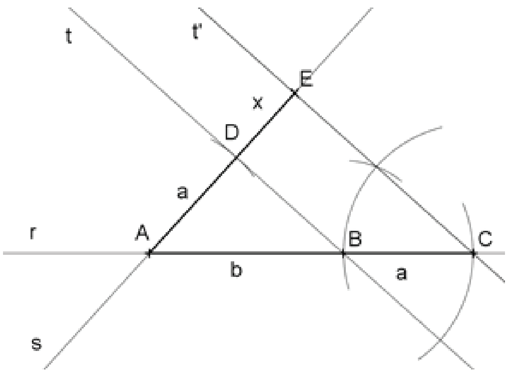
Obs. Em Desenho Geométrico, só faz sentido a resolução gráfica, quando são dados três segmentos. Quando são dados três números, é mais simples a resolução algébrica.

8.4 Terceira proporcional

Chama-se *Terceira Proporcional* de dois segmentos a um terceiro segmento igual ao quadrado de um dividido pelo outro. Logo, dados os dois segmentos *a* e *b*, existem duas terceiras proporcionais, *x* e *y*.

8.4.1 Terceira proporcional *x*

Resolução gráfica (Teorema de Tales):



Resolução algébrica:

$$x = \frac{a^2}{b} \Rightarrow x = \frac{a * a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{a}$$

JUSTIFICATIVA

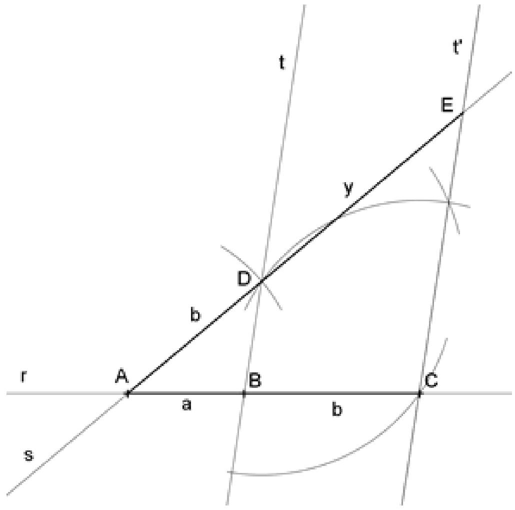
$\Delta\, ABD \sim \Delta\, ACE$

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *r*, e uma reta *s* concorrente à *r* que faça um ângulo qualquer com *r*. A partir de *A*, marcar o segmento *a* na reta *s* e os segmentos *b* e *a*, respectivamente na reta *r*. Traçar *BD*, e em seguida traçar *CE* paralela à *BD*, para definir *x*.

8.4.2 Terceira proporcional *y*

Resolução gráfica (Teorema de Tales):



Resolução algébrica:

$$y = \frac{b^2}{a} \Rightarrow y = \frac{b * b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{y}{b}$$

JUSTIFICATIVA

$\Delta\, ABD \sim \Delta\, ACE$

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *r*, e uma reta *s* concorrente à *r* que faça um ângulo qualquer com *r*. A partir de *A*, marcar o segmento *b* na reta *s* e os segmentos *a* e *b*, respectivamente na reta *r*. Traçar *BD*, em seguida traçar *CE* paralela à *BD*, para definir *y*.

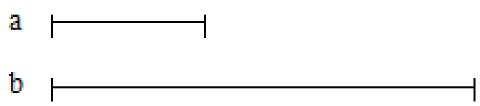
8.5 Média geométrica

A média geométrica ou média proporcional de dois segmentos é o segmento cuja medida é igual à raiz quadrada do produto dos dois segmentos dados.

Resolução algébrica:

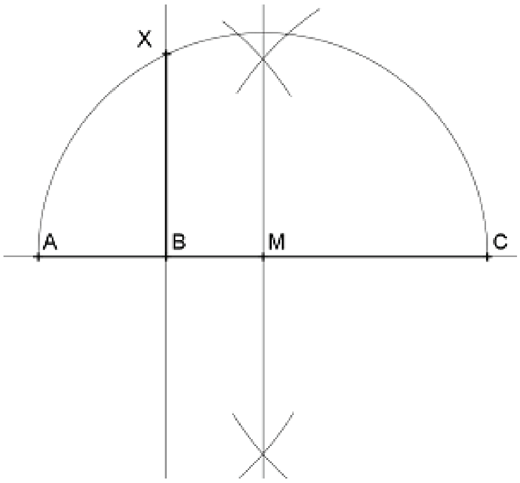
$$x = \sqrt{a * b} \Rightarrow x^2 = a * b \Rightarrow x * x = a * b \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

Dados os segmentos *a* e *b*, a resolução gráfica pode ser feita por um dos dois processos.



1° Processo:

Neste processo, o segmento *b* tem origem no fim do segmento *a*.



JUSTIFICATIVA

$AM = MC$
$\Delta AXC \rightarrow \Delta$Retângulo
$BX \perp AC$

Então $\Delta AXB \sim \Delta XCB$

Logo $\frac{XC}{XA} = \frac{BC}{BX} = \frac{BX}{AB}$

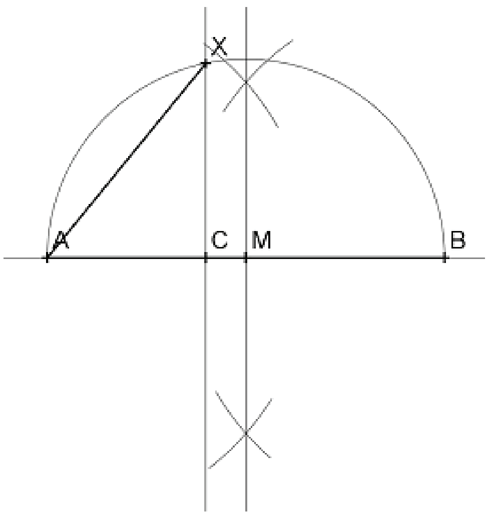
Se $AB = a$
$BC = b$
$BX = x$

Então $\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \sqrt{a*b}$

> **CONSTRUÇÃO**
>
> Sobre uma reta, definir um ponto *A* e, a partir de *A*, traçar o segmento *a*. A partir da extremidade do segmento *a*, traçar o segmento *b*. Definir os pontos *B* e *C* ao fim dos segmentos *a* e *b*, respectivamente. Definir *M*, o ponto médio de *AC*. Com centro em *M* e raio *MA*, traçar a semicircunferência cujo *AC* é o diâmetro. Traçar uma perpendicular à *AC*, que passe por *B*. Definir o ponto *X* na interseção da perpendicular com a semicircunferência. Neste processo, o segmento *BX* é a média geométrica dos segmentos *a* e *b* dados.

2° Processo:

Neste processo, os segmentos *a* e *b* tem origem no mesmo ponto. Ou seja, ambos tem origem no ponto *A*.



JUSTIFICATIVA

$AM = MB$
$\Delta AXB \rightarrow \Delta$ Retângulo
$CX \perp AB$

Então $\Delta ABX \sim \Delta ACX$

Logo $\frac{SB}{AX} = \frac{AX}{AC} = \frac{BX}{CX}$

Se $AB = b$
$AC = a$
$AX = x$

Então $\frac{b}{x} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \sqrt{a*b}$

CONSTRUÇÃO

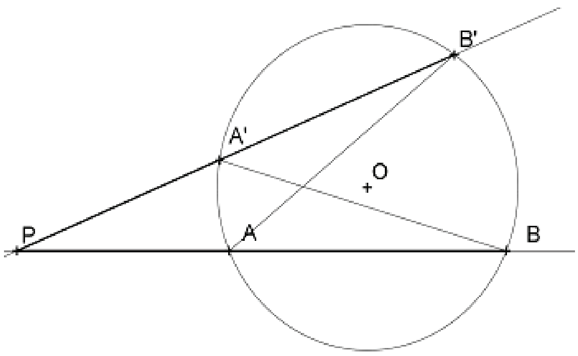
Sobre uma reta, definir um ponto *A*, traçar o segmento *a* e *b* ambos a partir de *A*. Definir os pontos *C* e *B* ao fim dos segmentos *a* e *b*, respectivamente. Definir *M*, o ponto médio do segmento *AB* e traçar uma semicircunferência de centro em *M* e raio *MA*. Traçar uma perpendicular ao segmento *AB*, que passe pelo ponto *C*. Na interseção da perpendicular com a semicircunferência, definir o ponto *X*. Neste processo, o segmento *AX* é a média geométrica dos segmentos *a* e *b* dados.

8.6 Potência de ponto

Dados uma circunferência, um ponto *P* e uma reta *r* que contém *P* e é secante à circunferência, chama-se potência do ponto *P* ao produto *PA* x *PB*, constante para qualquer reta *r'*.

$PA \times PB = PA' \times PB' = PA'' \times PB'' = \ldots = k$

8.6.1 O ponto *P* é externo à circunferência



JUSTIFICATIVA

$\angle PBA' = \angle PB'A$

$\angle P$ é comum aos triângulos *PBA'* e *PB'A*

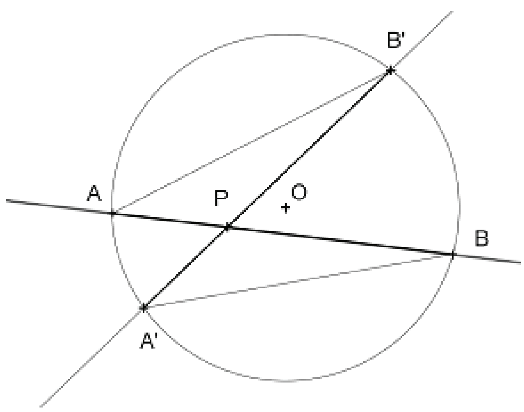
Então: $\angle PAB' = \angle PA'B$

Logo: $\Delta PAB' \sim \Delta PA'B$

Então: $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB}{PB'}$

Ou: $PA \times PB = PA' \times PB'$

8.6.2 O ponto *P* é interno à circunferência



JUSTIFICATIVA

$\angle PA'B = \angle PAB'$

$\angle PBA' = \angle PB'A$

$\angle APB' = \angle A'PB$

Logo: $\Delta PAB' \sim \Delta PA'B$

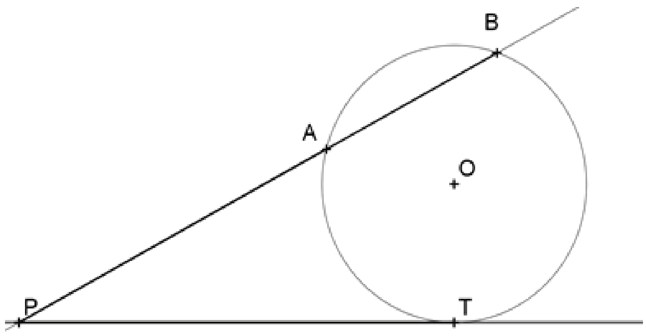
Então: $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB}{PB'}$

Ou: $PA \times PB = PA' \times PB'$

8.6.3. O ponto *P* é externo à circunferência e a reta r’ é tangente a ela no ponto *T*

Neste caso, temos que os pontos A’, B’ e T são coincidentes e PA’ = PB’ = PT, então:

$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow PT = \sqrt{PA \times PB}$$

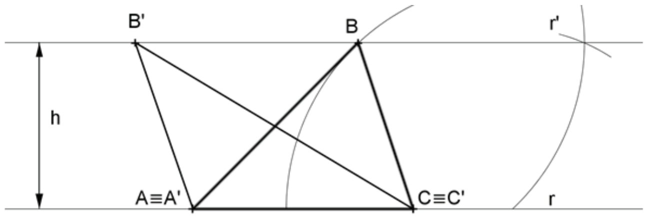


Equivalência

Considerando que o nosso objetivo é a resolução gráfica de problemas de Desenho Geométrico, podemos definir de maneira resumida que duas figuras são equivalentes quando possuem a mesma área. O símbolo para indicar que duas figuras são equivalentes é $\Leftrightarrow$

9.1 Construções básicas

a. Dois triângulos que têm base e alturas iguais são equivalentes.



JUSTIFICATIVA

$AC \rightarrow$ base
$h \rightarrow$ altura

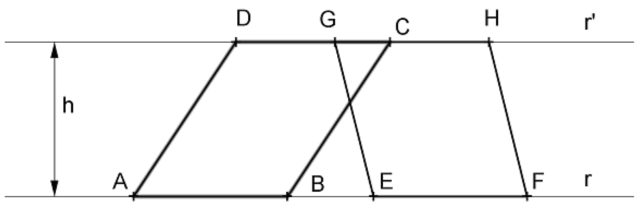
$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2}$$

$r \,//\, r'$

CONSTRUÇÃO

Considerando *AC* como base do *ΔACB*, traçar uma reta *r′* paralela à *r* com uma distância *h*, de *AC*. Qualquer ponto pertencente à *r′*, no exemplo ilustrado pelo ponto B′, formam com a base *AC* um triângulo de mesma área, ou seja, equivalente ao *ΔACB*.

b. Dois paralelogramos de base e alturas iguais são equivalentes.



JUSTIFICATIVA

Área = Base x Altura

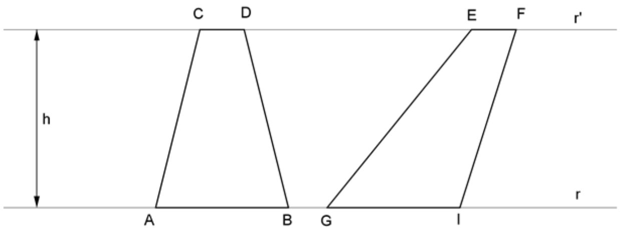
$r \,//\, r'$

$AB = EF = DC = GH$

CONSTRUÇÃO

Considerando *AB* como base e *h* como a altura do paralelogramo, traçar uma reta *r′*, paralela à *r* e a uma distância *h* de *r*. Em *r*, definir o segmento *EF* com mesma dimensão de *AB*, e em *r′* definir o segmento *GH* com mesma dimensão que *CD*.

c. Dois trapézios que têm as duas bases iguais e a altura igual são equivalentes.



JUSTIFICATIVA

$$\text{Área} = \frac{\text{Base} + \text{base}}{2} \times \text{Altura}$$

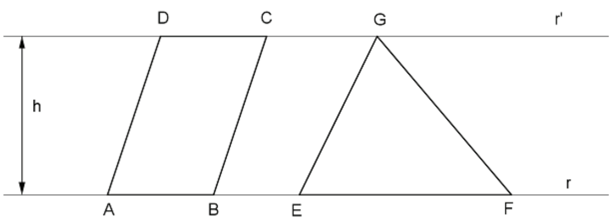
$r \mathbin{//} r'$

$AB = GI$
$CD = EF$

CONSTRUÇÃO

Considerando *AB* como base e *h* como a altura do trapézio, traçar uma reta *r'*, paralela à *r* à uma distância *h* de *r*. Em *r*, definir o segmento *GI* com mesma dimensão de *AB*, e em *r'* definir o segmento *EF* com mesma dimensão que *CD*.

d. Um paralelogramo que tem a base igual à metade da base de um triângulo e a altura igual a do triângulo, é equivalente a esse triângulo (idem o inverso).



JUSTIFICATIVA

$$\text{Área}_{\Delta} = \frac{\text{Base x Altura}}{2}$$

$$\text{Área}_{\text{Paral}} = \text{Base x Altura}$$

$$\text{Área}_{\Delta} = \frac{\text{EF x h}}{2}$$

$$\text{Área}_{\text{Paral}} = \text{AB x h}$$

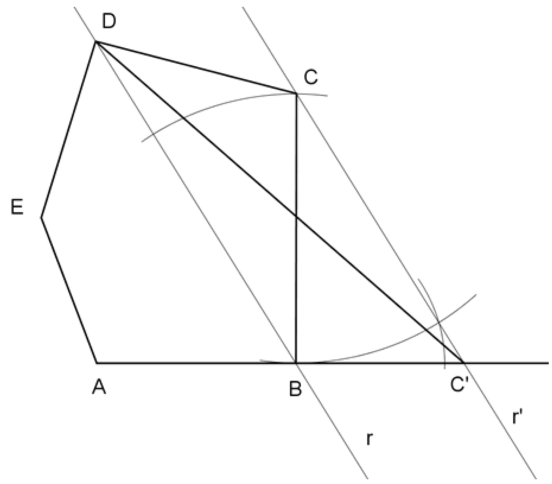
$EF = 2AB$ ou $AB = EF/2$

$$\frac{EF}{2} \times h = AB \times h \rightarrow AB \times h = AB \times h$$

CONSTRUÇÃO

Considerando *AB* como base e *h* como a altura do paralelogramo, traçar uma reta *r'*, paralela à *r* à uma distância *h* de *r*. Em *r*, definir o segmento *EF* com o **dobro** da dimensão de *AB*, e em *r'* definir o ponto *G* colinear ao segmento *CD*.

e. Transformar um polígono qualquer de *n* lados em outro equivalente de (*n – 1*) lados.



JUSTIFICATIVA

r // r'

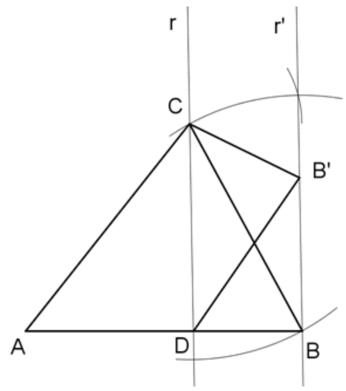
ΔBCD ⇔ ΔBC'D

ABCDE ⇔ AC'DE

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *r* que passe pelos pontos *B* e *D*, de modo que o segmento *BD* seja a base do *ΔBDC*. Traçar uma reta *r'*, paralela à *r*, que passe pelo vértice *C*. Definir um ponto C' pertencente à reta r' que seja colinear ao prolongamento do lado *AB* do polígono. Definir o polígono equivalente de 4 lados *AEDC'.*

f. Transformar um polígono qualquer de *n* lados em outro equivalente de (*n + 1)* lados.



JUSTIFICATIVA

r // r'

ΔBCD ⇔ ΔB'CD

ΔABC ⇔ ADB'C

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *r* que passe pelo ponto *C* e intercepte o lado *AB* no ponto *D*. Traçar uma reta *r'* paralela à *r* que passe pelo ponto *B*. Definir um ponto *B'* pertencente à *r'*, não coincidente com *B* nem com a interseção do prolongamento do lado AC sobre a reta r. Unir os pontos *ACB'D*.

9.2 Retângulo equivalente

A área de qualquer figura pode ser expressa pelo produto de dois segmentos *m* e *n*, que são os lados do retângulo equivalente.

$\text{Área}_{qq} \Leftrightarrow \text{Área}_{\square}$

$\text{Área}_{\square} = m \times n \therefore \text{Área}_{qq} = m \times n$

Valores de *m* e *n* das principais figuras geométricas:

- Retângulo: *m* e *n* são os lados do retângulo.
- Quadrado: *m* e *n* são os lados do quadrado e $m = n$.
- Paralelogramo: *m* é uma das bases e *n* é a altura correspondente.
- Trapézio: *m* é a base média e *n* é a altura.
- Triângulo: *m* é a base e *n* a metade da altura correspondente.
- Polígono qualquer: *m* é a base e *n* a metade da altura correspondente do triângulo equivalente.

Quadratura de uma figura

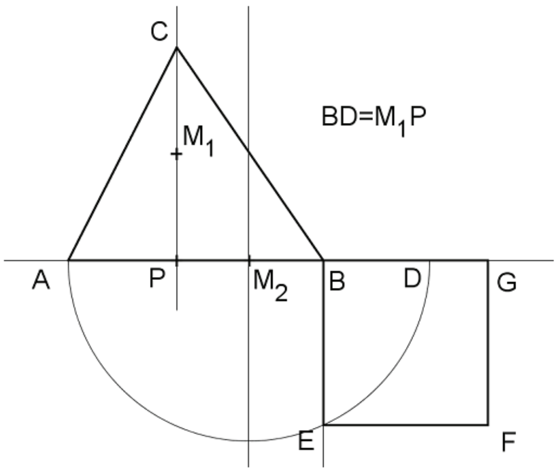
A quadratura de uma figura ou quadrado equivalente é a construção de um quadrado equivalente a uma figura dada. Chamando de *x* o lado do quadrado procurado, cuja área será x^2 e considerando que a área da figura dada pode ser expressa por $m \times n$, então:

$$x^2 = m * n$$

$$x = \sqrt{m * n}$$

Ou seja, *x* é a média geométrica de *m* e *n*.

Construção do quadrado equivalente a um triângulo dado, ou seja, quadratura do triângulo.



JUSTIFICATIVA

$PC \rightarrow$ altura do ΔABC

$PM_1 = M_1C = BD = n$

$AB = m$

$AM_2 = M_2D$

$BE = x \rightarrow$ média geométrica de *m* e *n*

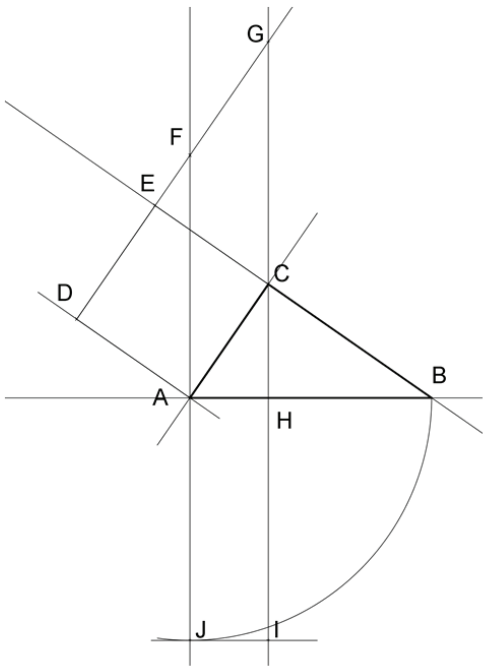
$x = \sqrt{m * n}$

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta perpendicular à *AB,* que passe por *C*. Definir o ponto médio M_1 de *CP*. Com centro em *B* e raio M_1P definir o ponto *D*. Definir o ponto médio M_2 do segmento *AD*. Traçar uma semicircunferência de centro M_2 e raio M_2A. Traçar uma perpendicular à *AD*, que passe pelo ponto *B*. Na interseção desta perpendicular com a semicircunferência, definir o ponto *E*. O segmento *BE* é o lado do quadrado *BEFG* que possui a mesma área do *ΔABC* dado.

9.3 Aplicações

1º Teorema de Euclides: o quadrado que tem por lado um cateto de um triângulo retângulo é equivalente ao retângulo que tem por lados consecutivos a hipotenusa e a projeção do cateto considerado, sobre a hipotenusa.



JUSTIFICATIVA

O quadrado *ACED* é equivalente ao paralelogramo *ACGF*, uma vez que tem a mesma base *AC* e a mesma altura, dada pela distância entre os segmentos paralelos *AC* e *DG*.
ACED ⇔ *ACGF*
Os triângulos *ABC* e *AFD* são iguais, uma vez que: *AC* = *AD*
∠*ACB* = ∠*ADF* = 90º
∠*CAB* = ∠*DAF*, pois ambos são complementares do ∠*FAC*.
Logo, *AF* = *AB*.
O paralelogramo *ACGF* é equivalente ao retângulo *AHIJ*, uma vez que têm bases iguais, *AF* = *AB* = *AJ*, e a mesma altura, dada pela distância *AH* entre os segmentos paralelos *FJ* e *GI*.
ACGF ⇔ *AHIJ*
O segmento *AH* é a projeção do cateto *AC* sobre a hipotenusa *AB*.
ACED ⇔ *ACGF* ⇔ *AHIJ*

CONSTRUÇÃO

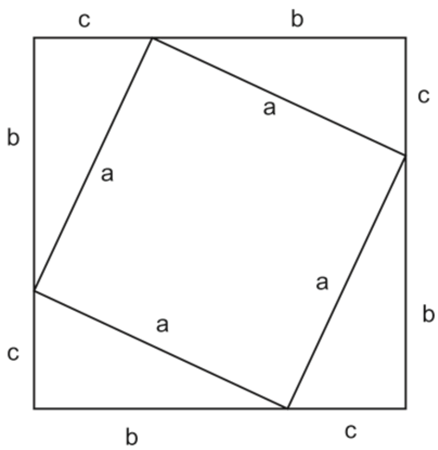
Dado o triângulo retângulo *ACB*, traçar um quadrado *ADEC* cujos lados possuem a mesma medida de *AC*. Traçar uma perpendicular à *AB* que passe por *A*. Com centro em *A* e raio *AB*, definir o ponto *J*. Traçar uma perpendicular à *AB* que passe pelo ponto *C* e definir o ponto *H*. Com centro em *H* e raio *AJ*, definir o ponto *I*.

Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo, o quadrado que tem por lado a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados que tem por lados os catetos.

Fontes históricas da geometria afirmam que Pitágoras foi o primeiro grego a demonstrar a propriedade geral dos triângulos retângulos, que já era conhecida dos babilônios e chineses havia séculos.

> "Existem muitos e belíssimos teoremas na Matemática, mas a aura de surpresa, originalidade, estética e importância que cerca o Teorema de Pitágoras fazem dele algo realmente incomparável em relação aos demais: todos os caminhos da Rainha das Ciências conduzem a ele". (GARBI, 2009)

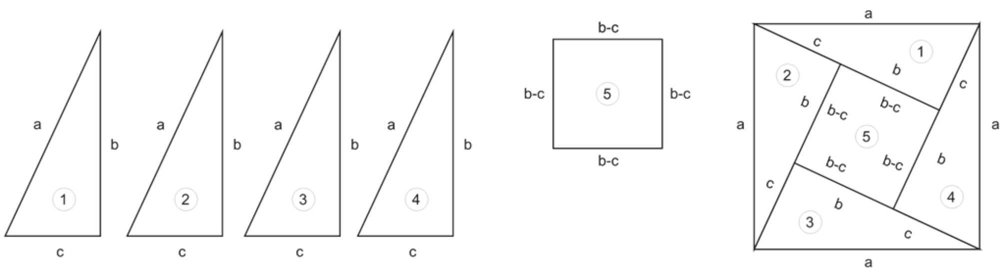
Não há indicação exata quanto ao caminho gráfico seguido por Pitágoras para demonstração do seu Teorema, mas estima-se que ele tenha utilizado um diagrama chinês.



Possível demonstração dada por Pitágoras (diagrama chinês).

Seja um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. Construir um quadrado de lado $(b + c)$. Nele, conforme o diagrama chinês, construir quatro triângulos retângulos iguais ao triângulo dado. A área do quadrado maior é $(b + c)^2$. O quadrado menor é a^2. As áreas dos quatro triângulos totalizam $2bc$. Logo, $a^2 + 2bc = (b + c)^2$ e , portanto, $a^2 = b^2 + c^2$.

Outro raciocínio que Pitágoras pode ter adotado para provar seu teorema é a partir de um triângulo retângulo qualquer, onde a é hipotenusa, e b e c são os catetos. Se $b = c$, a constatação é óbvia. Se os catetos são diferentes, por exemplo, $b > c$, construir quatro triângulos retângulos iguais ao triângulo dado e um quadrado cujo lado seja $b – c$. Essas cinco figuras podem ser dispostas, de modo a formar um quadrado de lado a.



Outra prova do Teorema de Pitágoras.

Existem diferentes maneiras para demonstrar o Teorema de Pitágoras. A demonstração pode ser feita, inclusive, pela aplicação do 1º Teorema de Euclides aos dois catetos, conforme apresentado anteriormente. Abaixo será apresentada uma importante demonstração do Teorema de Pitágoras por Leonardo da Vinci (1452-1519).

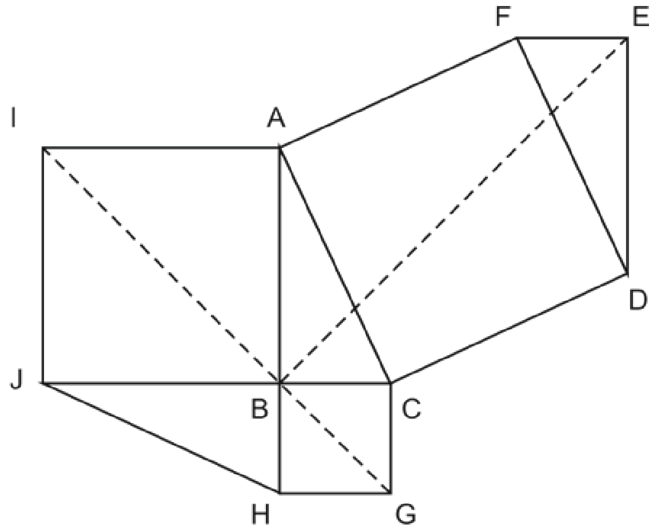


Diagrama de Da Vinci para o Teorema de Pitágoras.

Dado o *ΔABC*, construir o quadrado da hipotenusa e os quadrados dos catetos. Sobre o lado *FD* construir o *ΔDEF*, igual ao *ΔABC*, porém invertido. Unir *J* a *H*. Os polígonos *GCAI* e *IJHG* são iguais. Os polígonos *BAFE* e *EDCB* também são iguais entre si. Mas cada um deles é igual aos polígonos *GCAI* e *IJHG*. Logo:

Área de *ACGHJI* = Área de *ABCDEF*

Área de *ACGHJI* = quadrados dos catetos mais dois triângulos *ABC*

Área de *ABCDEF* = quadrado da hipotenusa mais dois triângulos *ABC*

Subtraindo os dois triângulos de cada lado da igualdade, o teorema está provado.

Semelhança e Homotetia

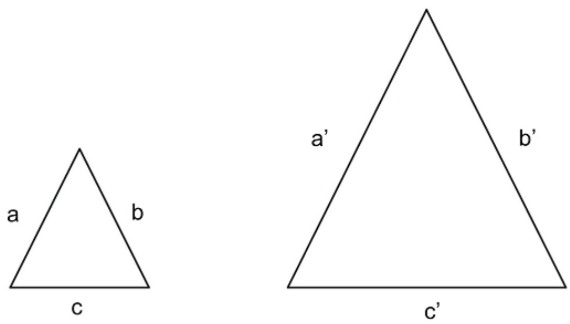
É função da Geometria, definir os conceitos de semelhança e de homotetia. Na prática do Desenho Geométrico não basta compreender as definições, é preciso também visualizar a aplicação destas em problemas gráficos.

10.1 Semelhança

Figuras semelhantes têm a mesma forma ou formato. Esta definição vale tanto para figuras geométricas como para qualquer outra figura.
As figuras semelhantes apresentam duas propriedades:

1ª Propriedade: os ângulos homólogos são ordenadamente iguais.
2ª Propriedade: os segmentos homólogos são proporcionais.

Tomando os dois triângulos semelhantes abaixo, como exemplo, essa proporcionalidade pode ser expressa de dois modos.



- 1º Modo: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = k$ Razão de semelhança
- 2º Modo: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = t_1$ Razão qualquer

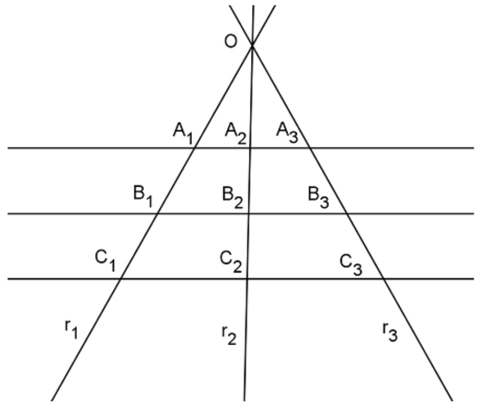
$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = t_2$

$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} = t_n$

Nota: No 2º modo não há reticências (...), exceto quando existem mais do que duas figuras semelhantes.

Abaixo estão representadas três importantes aplicações que se valem das propriedades comuns de semelhança:

- **Teorema linear de Tales:** Se um feixe de retas paralelas é atravessado por um feixe de retas concorrentes, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma reta é igual à razão entre os segmentos respectivamente correspondentes noutra reta do mesmo feixe.



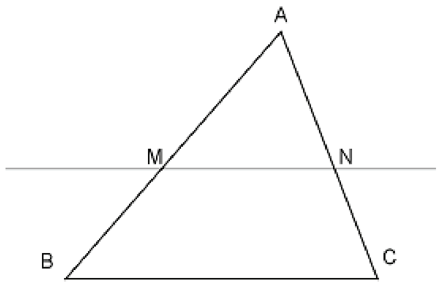
$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \ldots = k$$

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2} = t_1$$

$$\frac{OB_1}{A_1C_1} = \frac{OB_2}{A_2C_2} = t_2$$

- **Teorema de Tales no triângulo:**

Dado um triângulo *ABC* e um segmento *MN* paralelo ao lado *BC* e com extremidades nos lados *AB* e *AC*.



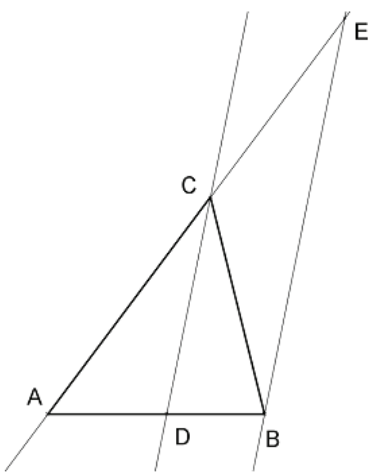
Se *MN // BC*, então:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = k$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC} = k_1$$

Caso Particular: se *M* é o ponto médio de *AB*, então *N* é o ponto médio de *AC*.

- **Teorema das bissetrizes:** A bissetriz de um *ângulo interno* de um triângulo divide o lado oposto em partes proporcionais aos outros dois lados.



JUSTIFICATIVA

CD é a bissetriz do ângulo do vértice *C*.

Se *CE = CB*, o Δ*CBE* é isósceles.

Logo,

$\angle CBE = \angle CEB$

$\angle CBE + \angle CEB = \angle ACB$

Como,

$\angle DCB = \angle ACD$

$\angle DCB + \angle ACD = \angle ACB$

Logo,

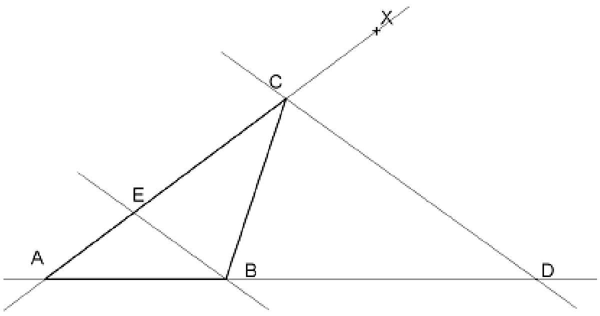
$\angle DCB = \angle CBE$ e $DC \parallel BE$

Então,

$\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DB}$ como, $CE = CB$

Temos, $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{AB}$

A bissetriz de um *ângulo externo* de um triângulo encontra a reta suporte do lado oposto, e determina sobre esta um ponto cujas distâncias aos extremos do lado são proporcionais aos outros dois lados.



JUSTIFICATIVA

CD é a bissetriz do ângulo externo do vértice *C*.

Se $CE = CB$, o ΔCBE é isósceles.

Logo, $<CBE = <CEB$, e

$<CBE + <CEB = <BCX$

Como, $<DCB = <DCX$

E, $<DCB + <DCX = <BCX$

Logo, $<DCB = <CBE$ e $DC \parallel BE$

Então, $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DB}$

Como, $CE = CB$

Temos, $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$

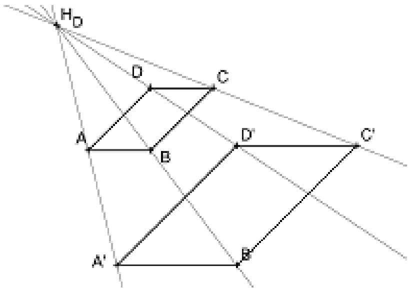
10.2 Homotetia

As figuras homotéticas são figuras semelhantes e que, além disso, têm os segmentos homólogos paralelos. Desta forma, podemos dizer de forma abreviada que:

Homotetia = Semelhança + Paralelismo

As figuras homotéticas conservam as duas propriedades das figuras semelhantes e têm, ainda, mais duas propriedades.

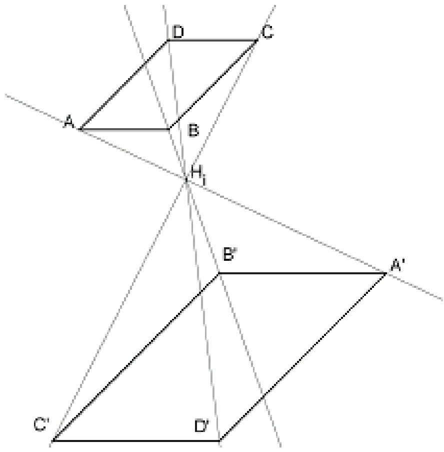
1ª Propriedade: os ângulos homólogos são ordenadamente iguais.
2ª Propriedade: os segmentos homólogos são proporcionais.
3ª Propriedade: as retas que ligam os pontos homólogos incidem todos no mesmo ponto H_d ou H_i, conforme a homotetia seja direta ou inversa. H_d e H_i são denominados de centro de homotetia direta ou inversa.
4ª Propriedade: a razão entre os raios vetores* de pontos homólogos é constante e igual a razão de semelhança k, também chamada de razão de homotetia.



$$\frac{H_dA'}{H_dA} = \frac{H_dB'}{H_dB} = \frac{H_dC'}{H_dC} = \frac{H_dD'}{H_dD} = +k$$

e

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \; \frac{C'D'}{CD} \; \frac{D'A'}{DA} = k$$



$$\frac{H_iA'}{H_iA} = \frac{H_iB'}{H_iB} = \frac{H_iC'}{H_iC} = \frac{H_iD'}{H_iD} = -k$$

e

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = -k$$

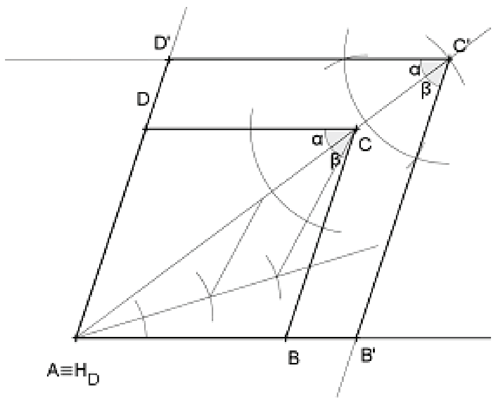
* Raio vetor é um segmento orientado, com uma extremidade no centro de homotetia e a outra num ponto da figura; esse segmento é orientado do centro da homotetia para o ponto da figura.

Convenções

Homotetia direta (H_d) $\Rightarrow$ k > 0 (positivo)
Homotetia inversa (H_i) $\Rightarrow$ k < 0 (negativo)
Valor absoluto de k. Multiplicar uma figura significa:
Ampliá-la, quando $|k| > 1$
Reduzi-la, quando $|k| < 1$

Problema geral 1

Multiplicar o polígono *ABCD* dado pela constante k = +4/3.



CONSTRUÇÃO

Inicialmente deve-se observar a constante k sob dois aspectos. Se k>1, a figura será ampliada; e se k for positivo, a ampliação será direta. Dada a figura *ABCD*, para simplificar a construção, definir um ponto H_d coincidente com um dos vértices da figura, no caso o vértice *A*. Em seguida, irradiar, isto é, unir o ponto H_d a cada vértice do polígono obtendo os raios vetores H_dA, H_dB, H_dC e H_dD. Dividir cada raio vetor por três partes iguais, pois três é o valor do denominador da constante k = +4/3. Traçar a partir de H_d quatro vezes a parte encontrada anteriormente sobre cada respectivo vetor, pois quatro é valor do numerador da constante k. Obter e unir os pontos *A', B', C' e D'*. Outra solução para este exercício é traçar a diagonal da figura, correspondente ao segmento *AC*, marcar o ponto *C'* no prolongamento dessa diagonal, sendo *CC'* igual a 1/3 *AC*. Em seguida, traçar as paralelas aos lados *CD* e *CB*, determinando *D'* e *B'* no prolongamento dos lados *AD* e *AB*, respectivamente.

Simplificações do problema geral 1

1ª Simplificação: Para o caso do centro de homotetia poder ser definido arbitrariamente, definir H_d coincidente com um dos vértices do polígono dado. Os raios vetores serão os prolongamentos dos lados do polígono.

2ª Simplificação: Multiplicar apenas o vértice *C* do polígono dado. Obter *C'* pelo qual traçar paralelas aos lados do polígono dado. Neste caso, convém multiplicar o vértice intermediário, e não o vértice externo para que não haja acúmulo de erros gráficos.

Problema geral 2

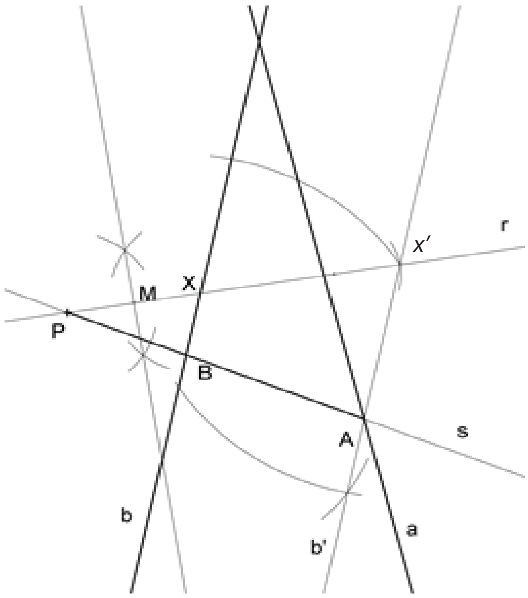
Dadas duas linhas *a* e *b*, um ponto *H* e um número k, construir uma reta *x* passando por *H* que intercepta *a* em *A* e *b* em *B*, de forma que: *HA*/*HB* = k

As duas linhas dadas podem ser:

- Duas retas
- Duas circunferências
- Uma reta e uma circunferência

Se *HA* e *HB* tiverem o mesmo sentido, k será positivo; se tiverem sentidos opostos, ou seja, *H* está entre *A* e *B*, k será negativo. Abaixo estão representados três exemplos do problema geral 2.

a. Dadas duas retas quaisquer e um ponto *P* não pertencente a elas, traçar por *P* uma reta que intercepta a reta *a* em *A* e a *b* em *B*, de modo que *PA*/*PB* = k.



$$\frac{PA}{PB} = k = \frac{5}{2}$$

$$\frac{PX'}{PX} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{Pb'}{Pb} = \frac{5}{2}$$

Logo,

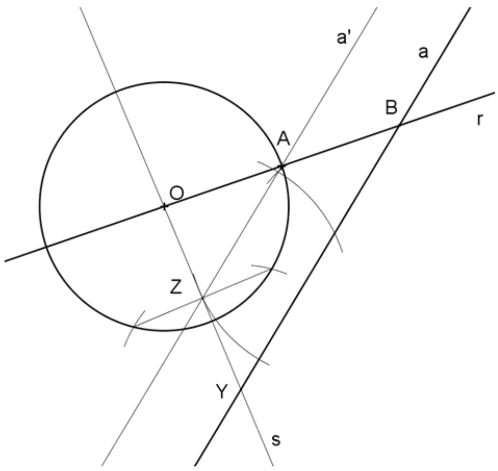
$$\frac{PA}{PB} = \frac{5}{2}$$

CONSTRUÇÃO

Considerar *P* como centro de homotetia direta. Traçar uma reta auxiliar, *r*, que passe por *P* e intercepte as retas *a* e *b*. Na interseção da reta *r* com a reta *b*, definir o ponto *X*. Dividir o segmento *PX* em duas partes iguais (dois é o valor do denominador da constante dada). A partir de *P*, marcar cinco destas partes na reta *r* (valor do numerador dado) em direção à *X*. Ao fim da quinta parte definir o ponto *X'*. Traçar uma reta *b'* paralela à *b*, que passe pelo ponto *X'*. Na interseção da reta *b'* com a reta *a*, definir o ponto *A*. Traçar uma reta *s* unindo os pontos *A* e *P*. Na interseção da reta s com a reta *b*, determinar o ponto *B*.

b. Dada uma reta *a* e uma circunferência de centro *O*, traçar por *O* uma reta que intercepta a circunferência em *A* e a reta *a* em *B*, de modo que *OA*/*OB* = k.

k = ½
Raio = 2 cm
Oa = 3 cm

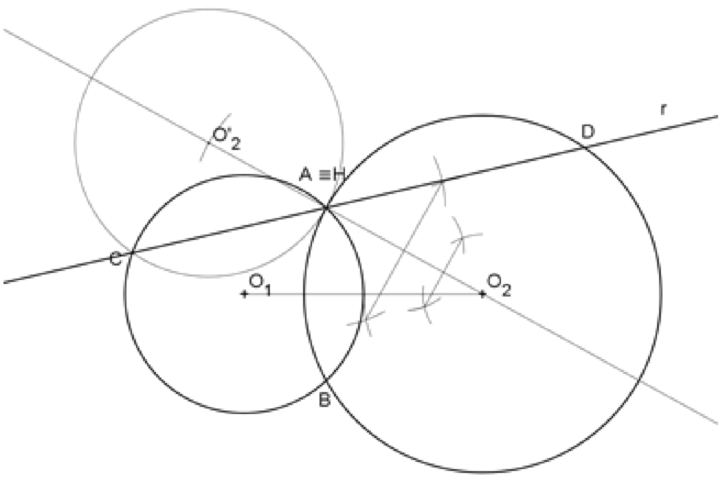


CONSTRUÇÃO

Traçar reta *s* auxiliar, que passe por *O* e intercepte a reta *a* no ponto *Y*. Dividir *OY* em duas partes iguais (dois é denominador da constante dada). Definir *Z* no ponto médio de *OY*. Traçar uma reta *a'* paralela à reta *a* que passe por *Z*. No ponto de interseção da reta *a'* com a circunferência, definir o ponto *A*. Traçar uma reta passando por *AO* até interceptar a reta *a* e então definir o ponto *B*.

c. Dadas duas circunferências de centros O_1 e O_2, secantes em *A* e *B*, traçar por *A* uma reta *r* de forma que a corda determinada na circunferência de centro O_1 seja igual a 3/4 da corda determinada na outra circunferência.

Dados: $R_1 = 2$ cm e $R_2 = 3$ cm e $O_1O_2 = 4$ cm.

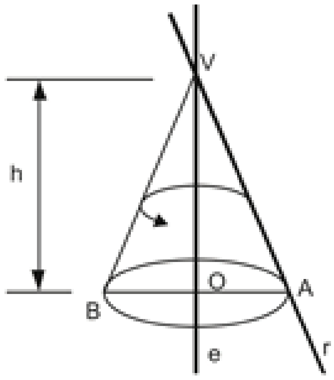


CONSTRUÇÃO

Definindo H_i coincidente com *A*, multiplicar O_2 por k = -3/4. Traçar uma circunferência com centro em O_2' e raio $O_2'H_i$. Traçar uma reta r que passe pelos pontos *C* e *A* para obter o ponto *D*.
CA/AD=3/4.

Cônicas

As cônicas são linhas curvas, planas, originadas de seções feitas em um cone. A superfície cônica é originada de uma reta em rotação ao redor de um eixo. O ponto de interseção entre a reta e o eixo é denominado de vértice da superfície cônica.



$r \rightarrow$ reta geratriz

$e \rightarrow$ eixo de rotação

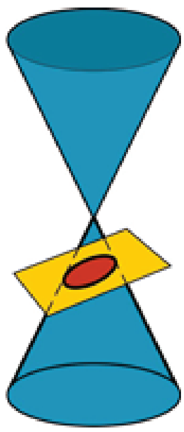
$V \rightarrow$ vértice

$AB \rightarrow$ diâmetro da base

$O \rightarrow$ centro da base

11.1 Elipse

É a curva gerada pela passagem de um plano secante ao cone, não paralelo à base, ao eixo de rotação e nem à reta geratriz. O plano determina no cone uma curva plana, fechada e simétrica, na qual a soma das distâncias de qualquer de seus pontos a dois pontos interiores fixos, denominados de focos, é constante.

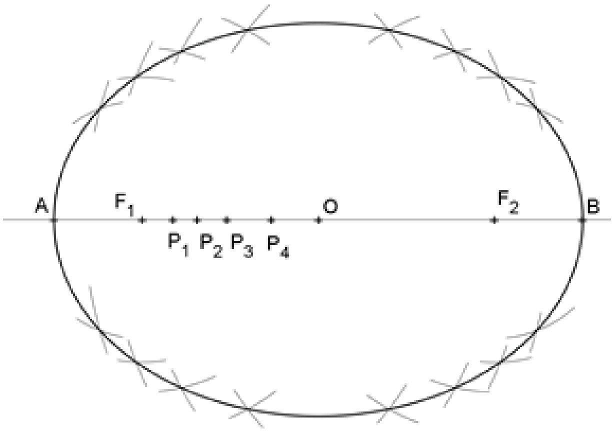


Definição da elipse

Dados dois pontos num plano, F_1 e F_2, chama-se **elipse** o lugar geométrico dos pontos P desse plano, cuja soma de suas distâncias aos pontos dados é constante e igual a 2a.

$$F_1P + F_2P = 2a = AB$$

Construir uma elipse com distância focal $F_1F_2 = 6$ cm e constante $2a = 9$ cm.



$AB \rightarrow$ eixo maior, constante 2a

$O \rightarrow$ centro

F_1 e $F_2 \rightarrow$ focos

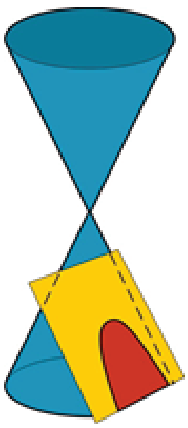
$F_1F_2 \rightarrow$ distância focal

CONSTRUÇÃO

Traçar AB e F_1F_2. Definir P_1 pertencente à AB entre um dos focos, F_1 ou F_2 e o centro da elipse. Com raio P_1A e centro em F_1 e F_2 traçar quatro arcos. Com raio P_1B e centro em F_1 e F_2 interceptar os quatro arcos traçados. Definir P_2 qualquer, pertencente à AB, entre um dos focos, F_1 ou F_2 e o centro da elipse, e, não coincidente com P_1 e repetir a operação executada com P_1 dessa vez considerando P_2. Os pontos encontrados nas interseções dos arcos pertencem à elipse. Unir os pontos à mão livre para traçar a elipse.

11.2 Parábola

É a curva gerada pela passagem de um plano secante ao cone, paralelo à reta geratriz. O plano determina no cone uma curva plana, aberta e infinita, na qual cada ponto equidista de um ponto fixo e de uma reta, denominados de foco e diretriz.

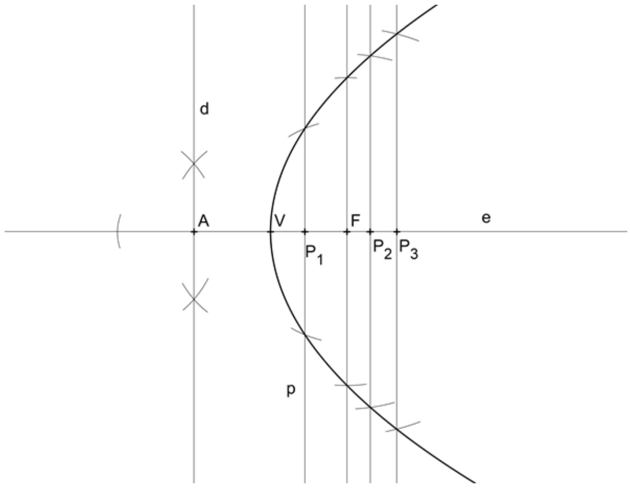


Definição da parábola

Dados num plano um ponto F e uma reta r que não passa por F, chama-se **parábola** o lugar geométrico dos pontos P do plano equidistantes de F e r.

$PF = Pr$

Construir uma parábola com distância focal igual a 2 cm.



$F \rightarrow$ foco

$e \rightarrow$ reta eixo

$V \rightarrow$ vértice

$VF \rightarrow$ distância focal

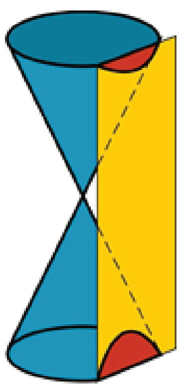
$AF \rightarrow$ parâmetro (=2F)

CONSTRUÇÃO

Dado *VF* = 2 cm, sabe-se que *AF* = 2*(VF)*. Traçar uma reta eixo denominada *e*. Definir na reta eixo o ponto *V* e os pontos *A* e *F* equidistantes de *V* em 2 cm. Construir uma reta diretriz, denominada *d*, perpendicular à reta *e*, que a intercepte no ponto *A*. Definir um ponto P_1 que esteja localizado após o vértice *V*, no sentido *VF*. Traçar uma reta *p* perpendicular à reta *e*, que passe por P_1. Com raio AP_1 e centro em *F*, obter dois pontos de interseção com a reta *p*. Definir os pontos P_2 e P_3, segundo os mesmo critérios utilizados para definir P_1 e repetir as operações seguintes. Os pontos encontrados nas interseções dos arcos com as retas perpendiculares pertencem à parábola. Unir os pontos à mão livre para traçar a parábola.

11.3 Hipérbole

É a curva gerada pela passagem de um plano secante ao cone, paralelo ao eixo de rotação. O plano determina no cone duas curvas planas, abertas e infinitas, nas quais é constante a diferença entre a distância de cada um de seus pontos *P* a dois pontos fixos, denominados de focos.

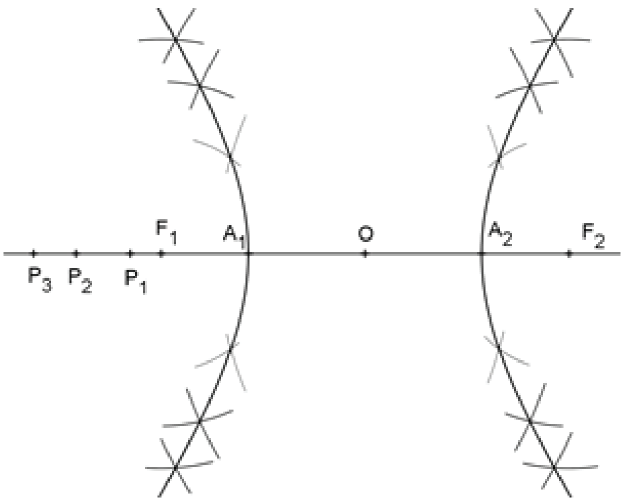


Definição da hipérbole

Dados dois pontos num plano, F_1 e F_2, chama-se **hipérbole** o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja diferença de suas distâncias aos pontos dados é constante e igual a 2a.

$$F_1P - F_2P = 2a = A_1A_2$$

Construir uma hipérbole com distância focal $F_1F_2 = 7$ cm e constante 2a = 4 cm.



F_1 e $F_2 \rightarrow$ focos

A_1 e $A_2 \rightarrow$ vértices

$O \rightarrow$ centro de simetria

$F_1F_2 \rightarrow$ distância focal

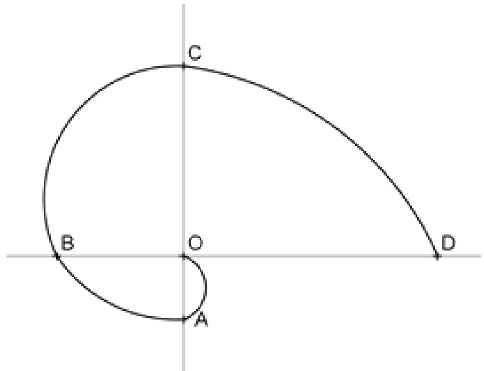
$A_1A_2 \rightarrow$ eixo transverso, constante 2a

CONSTRUÇÃO

Sabe-se que $F_1P - F_2P = A_1A_2 = 2a$. Traçar uma reta qualquer e sobre ela marcar os pontos O, A_1, A_2, F_1, F_2. Com centro em A_1, marcar um ponto P_1 que deve estar após o foco, no sentido do vértice para o foco. Com raio A_1P_1 e com centro nos pontos F_1 e F_2 marcar quatro arcos. Com raio A_2P_1 e centro nos pontos F_1 e F_2 interceptar os quatro arcos feitos anteriormente. Definir P_2, colinear à A_1 e A_2 e não coincidente com P_1 e repetir a operação. Os pontos encontrados nas interseções dos arcos pertencem à hipérbole. Unir os pontos à mão livre para traçar a hipérbole.

Espiral

Espiral é uma curva plana que gira em torno de um ponto fixo, chamado pólo, e dele afasta-se ou aproxima-se segundo uma determinada lei que estabeleça uma relação entre as velocidades de dois movimentos: o circular e o retilíneo.



O → pólo ou centro da espiral
OD → passo da espiral
OABCD → espira

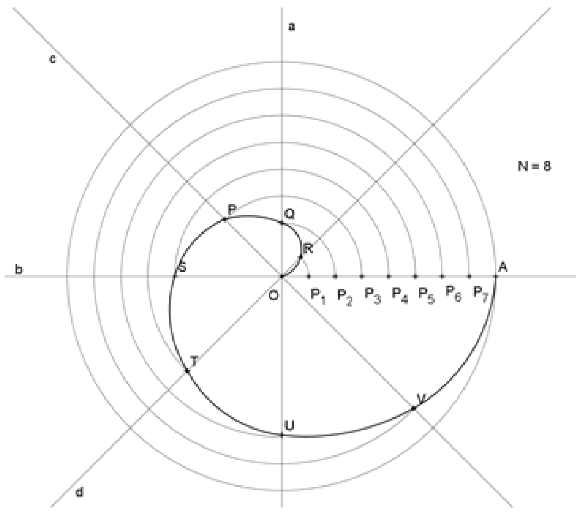
De acordo com suas propriedades, as espirais podem ser classificadas em bidimensionais, tridimensionais e policêntricas. Uma das espirais bidimensionais mais importantes é a espiral de Arquimedes.

12.1 Espiral de Arquimedes

Se uma reta *r* gira com movimento uniforme em torno de um ponto fixo *O* pertencente a ela e se um ponto *P* percorre *r* com velocidade constante, a trajetória descrita por *P* é uma curva denominada Espiral de Arquimedes.

A espiral de Arquimedes pode ser construída traçando uma circunferência com raio igual ao passo desejado e dividindo a circunferência e o raio em *n* partes.

a. Construir uma espiral de Arquimedes, com sentido anti-horário, com passo igual a 8 cm.



CONSTRUÇÃO

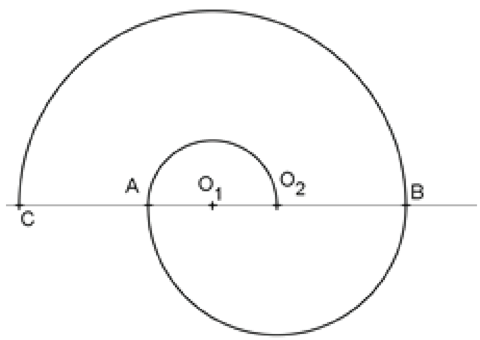
Traçar uma reta *a*, e a reta *b*, perpendicular à reta *a*, que a intercepte no ponto de O. Utilizando um dos processos de divisão de segmento, dividir o raio *OA* em n partes, no caso, 8 partes. Obter os pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 e P_7. Traçar bissetrizes *c* e *d* para dividir a circunferência em n partes, ou seja, 8 partes. Com centro em *O* e raio OP_1, traçar um arco que percorra o primeiro setor do círculo. Definir o ponto *R*. Com centro em *O* e raio OP_2, traçar um arco que percorra dois setores do círculo. Definir o ponto *Q*. Repetir o processo para os demais setores para obter os pontos *P, S, T, U, V*. Para obter a espiral, unir manualmente os pontos *O, R, Q, P, S, T, U V e A*.

12.2 Espirais policêntricas

As espirais policêntricas são falsas espirais, formadas por arcos de circunferências concordantes entre si, podendo ter dois ou mais centros.

Falsa espiral de dois centros

A falsa espiral de dois centros é formada pela alternância entre dois centros e o respectivo aumento do raio necessário para concordar as semicircunferências.

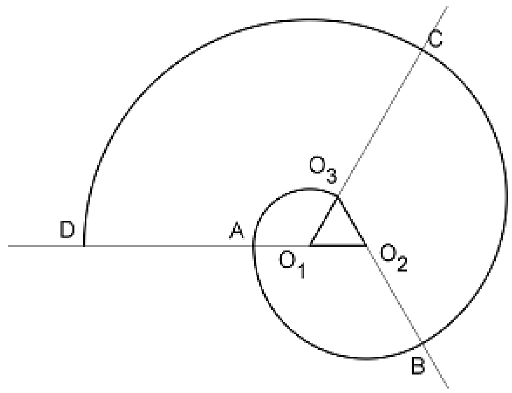


CONSTRUÇÃO

Com centro em O_1, traçar semicircunferência de raio O_1O_2. Obter o ponto *A*. Com centro O_2, traçar semicircunferência de raio O_2A. Obter o ponto *B*. Com centro em O_1, traçar semicircunferência de raio O_1B. Obter ponto *C*.

Falsa espiral de três centros

A falsa espiral de três centros é iniciada a partir de um dos vértices de um triângulo. Ela é formada pela alternância entre os três centros e o respectivo aumento do raio necessário para concordar as semicircunferências.



CONSTRUÇÃO

Com o centro em O_1, e raio O_1O_3, traçar um arco até a interseção do prolongamento do lado O_1O_2 do triângulo. Obter o ponto A. Com o centro em O_2, e raio O_2A, traçar um arco para obter o ponto *B* no prolongamento do lado O_3O_2. Com o centro em O_3, e raio O_3B, traçar um arco para obter o ponto *C* no prolongamento do lado O_1O_3.

Processos aproximados

Alguns problemas do Desenho Geométrico não têm resolução gráfica exata utilizando somente a régua e o compasso. Isto pode ser demonstrado matematicamente e alguns destes problemas já preocupavam os estudiosos de Geometria da Antiguidade. São exemplos clássicos: a quadratura de um círculo, a retificação da circunferência e a trisseção de um ângulo genérico. Para resolver estes casos, e somente estes, é permitido usar processos aproximados que não produzem respostas exatas, mas respostas aproximadas. Havendo processo exato, o rigor geométrico manda não aceitar processos aproximados.

Na resolução de um problema por processo aproximado, além do erro gráfico, ocorre o erro teórico, juntos eles somam-se para formar o erro final. O uso do processo aproximado pode ser justificado quando o erro teórico cometido é menor que o erro gráfico inevitável em qualquer construção gráfica. O erro teórico é dado pela seguinte expressão:

Erro teórico = Valor real – Valor obtido

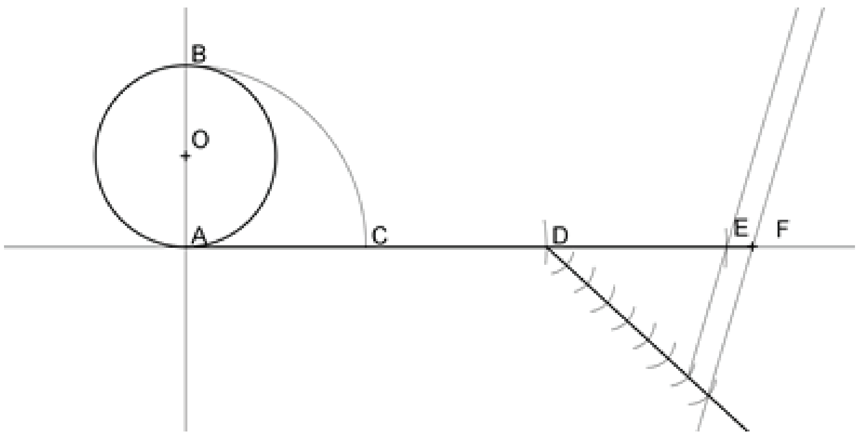
Para efeito prático, considera-se que o erro gráfico total aceitável em qualquer resolução deve ser menor que 0,5 mm.

13.1 Retificação da circunferência pelo Processo de Arquimedes

Retificar uma circunferência de raio *r* é construir graficamente um segmento de comprimento $2\pi r$, que é o comprimento da circunferência.

A retificação da circunferência pode ser feita por vários processos aproximados. Arquimedes desenvolveu um processo de retificação da circunferência que é conhecido pela simplicidade de aplicação e também pela possibilidade de se resolver o processo inverso.

O Processo de Arquimedes considera que a circunferência retificada corresponde a três vezes o diâmetro mais 1/7 do diâmetro da circunferência em questão.



CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *r* tangente à circunferência no ponto *A*. Sobre a reta *r*, com centro em *A*, marcar três medidas consecutivas do diâmetro, definindo os pontos *C*, *D* e *E*. Dividir o segmento *DE* em sete partes iguais. Somar uma parte da divisão do segmento *DE* para obter o ponto *F*. Uma forma simplificada de obter o ponto *F*, ou seja, definir 1/7 do diâmetro, está ilustrada no desenho acima.

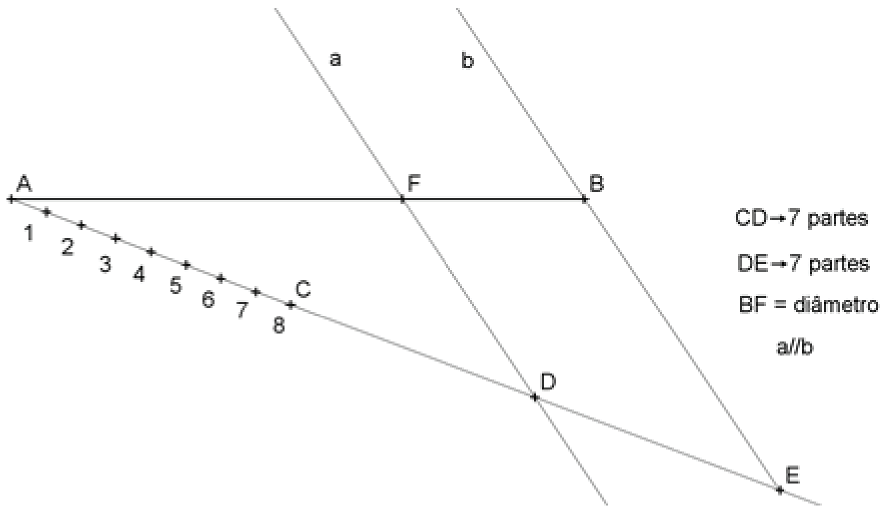
Cálculo do erro teórico:

Erro teórico = Valor real – Valor obtido
Valor real = 2 πr = π d = 3,1416 d
Valor obtido = 3 d + d/7 = 22/7 d = 3,1429 d
Erro teórico = (3,1416 – 3,1429) d
Erro teórico = - 0,0013 d

Se considerarmos uma circunferência de diâmetro 100 mm, o erro teórico será igual a 0,0013 x 100 mm = 0,13 mm, sendo, portanto, menor que o erro gráfico total aceitável de 0,5 mm.

13.2 Desretificação da circunferência pelo Processo de Arquimedes

A desretificação de um segmento *AB* consiste na construção de uma circunferência de comprimento (perímetro) igual ao segmento dado. Considerando que pelo processo de retificação de Arquimedes a circunferência corresponde a 22/7 d, temos que:



$AB = \frac{22}{7} d$ Logo, $d = \frac{7}{22} AB$

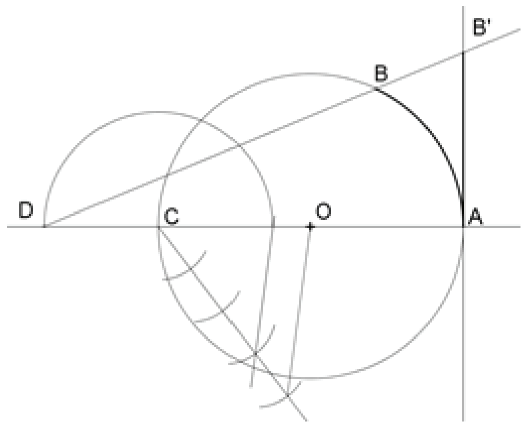
CONSTRUÇÃO

Dividir o segmento *AB* em 22 partes iguais. O diâmetro da circunferência corresponde a 7 das 22 partes de *AB*.

13.3 Retificação de arcos

Retificar um arco *AB* é obter um segmento *AB′* de comprimento igual ao do arco.

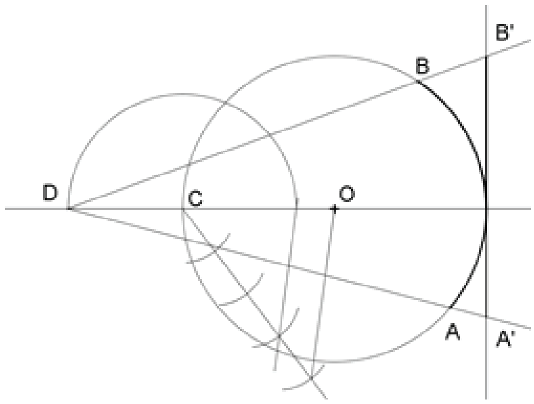
13.3.1 Arco com ângulo central de 0° a 90°



CONSTRUÇÃO

Dado um arco *AB,* traçar o diâmetro *AC* prolongado e uma reta tangente em *A*. Sobre o prolongamento do diâmetro, determinar um ponto *D* de forma que *DC* = ¾ *r*. Traçar uma reta por *D* e *B* até encontrar a reta tangente em *B′*. O segmento *AB′* será o arco retificado.

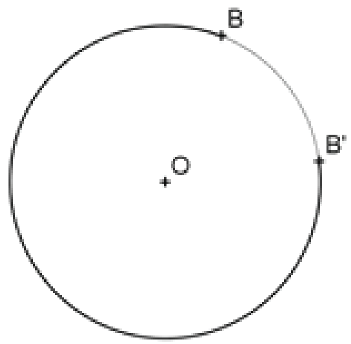
13.3.2 Arco com ângulo central de 90° a 180°



CONSTRUÇÃO

Neste caso, divide-se o arco em dois, de forma que ambos tenham ângulo central menor que 90° e aplica-se o processo utilizado em 13.3.1.

13.3.3 Arco com ângulo central entre 180° e 360°



CONSTRUÇÃO

Neste caso, primeiro retifica-se a circunferência toda. Em seguida, retifica-se o arco *BB′*. Por fim, constrói-se a diferença entre os dois segmentos obtidos anteriormente.

13.4 Desretificação de arcos

Para desretificar um arco é necessário ter, além do segmento dado, informações sobre a circunferência, o raio ou o ângulo central correspondente.

Desretificação de um arco dados o segmento e o raio

Neste caso, o problema se resume à determinação do ângulo central.

1º caso: Se o segmento dado é menor ou igual a 1,5 vezes o raio, a resolução é semelhante ao item 13.3.1., determinando *B* a partir do ponto *B′*.

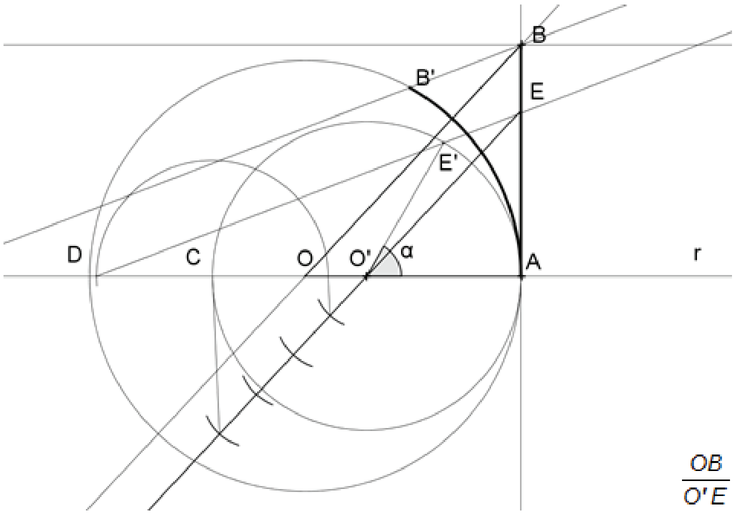
2º caso: Se o segmento dado é de 1,5 a 3,0 vezes o raio, a resolução é semelhante ao item 13.3.2., determinando *A* e *B* a partir dos pontos *A′* e *B′*.

3º caso: Se o segmento dado é de 3,0 a 2π vezes o raio, a resolução é semelhante ao item 13.3.3.

Desretificação de um arco dados o segmento e o ângulo central correspondente

Neste caso, o problema resume-se à determinação do raio da circunferência que contém o arco.

a. Desretificar o segmento *AB*, cujo ângulo central é igual a *α*.



$$\frac{OB}{O'E} = \frac{OA}{O'A}$$

CONSTRUÇÃO

Traçar uma reta *r* qualquer e em seguida traçar uma perpendicular *s* a *r*. A partir da interseção entre as duas retas marcar o segmento *AB*. Traçar uma paralela a reta *r* com a distância igual a *AB*. Sobre a reta *r* marcar o ponto *O′*, arbitrariamente. Com centro em *O′* e raio *O′A*, traçar a circunferência determinando o ponto *C* sobre *r*. Definir o ângulo *α*, tendo *O′* como vértice e um dos lados como *O′A*, e marcar o ponto *E′* na interseção do outro lado do ângulo com a circunferência. Dividir o segmento *CO′* em 4 partes iguais. Com centro em *C* e raio igual a ¾ de *CO′*, determinar o ponto *D* sobre *r*. Traçar uma reta contendo *D* e *E′* e marcar o ponto *E* na interseção com *s*. Traçar uma paralela a *O′E* passando por *B* e definir *O* sobre *r*. Traçar uma paralela a *DE* passando *B*. Com centro em *O* traçar uma circunferência de raio *OA* que definirá na interseção com a última paralela traçada o ponto *B′*. O arco *AB′* é o arco procurado.

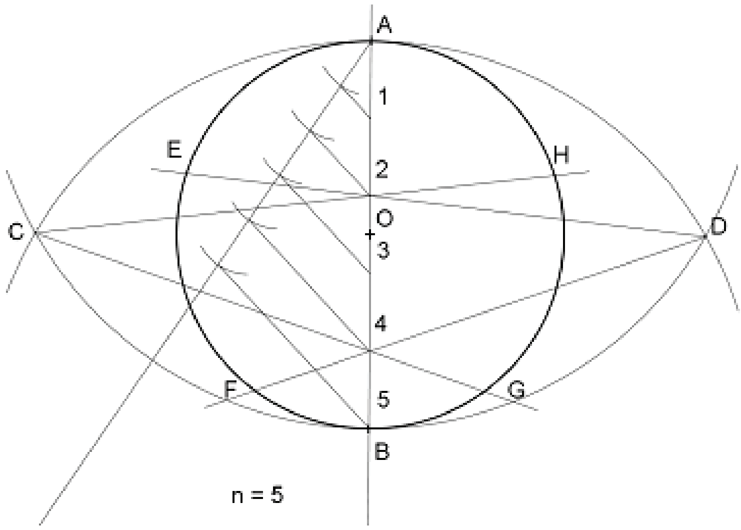
13.5 Divisão da circunferência em partes iguais ou proporcionais

A divisão da circunferência em partes iguais ou proporcionais pode ser feita por vários processos aproximados. Um dos processos consiste em retificar a circunferência, dividir o segmento obtido em partes iguais ou proporcionais e, em seguida, fazer a desretificação dos segmentos obtidos. Este processo pode ser aplicado também para dividir um arco de circunferência em partes iguais ou proporcionais.

Outro processo é o de Bion, mostrado a seguir. Existem vários outros processos para dividir uma circunferência em um número determinado de partes iguais, entretanto, são específicos para cada caso.

Processo de Bion
O Processo de Bion consiste em dividir uma circunferência em *n* partes iguais.

Dividir a circunferência abaixo em 5 partes iguais.



CONSTRUÇÃO

Dividir o diâmetro *AB* da circunferência dada em 5 partes iguais. Com centro em *A* e depois em *B*, traçar dois arcos de raio *AB*, determinando os pontos *C* e *D*. Por *C* e *D*, traçar retas passando pelos pontos pares (ou ímpares) da divisão do diâmetro *AB*, obtendo sobre a circunferência os pontos que a dividem em 5 partes iguais, que no exemplo são os pontos *A*, *E*, *F*, *G* e *H*.

Referências bibliográficas

BORTOLUCCI, Maria Ângela; CORTESI, Myrian V. P. **Sistemas Geométricos**. 2. ed. São Carlos: Universidade de São Paulo, 1998.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GIONGO, Affonso Rocha. **Curso de Desenho Geométrico**. São Paulo: Editora Nobel, 1977.

MARMO, Carlos M. B. **Curso de Desenho**. V. 1 - 3. Editora Moderna, 1974.

PUTNOKI, José Carlos**. Desenho Geométrico**. 4. ed. São Paulo: Editora Scipione, 1993.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

Notas finais

GeoGebra

A maior parte das figuras apresentadas nesta apostila foi elaborada por meio do *software* GeoGebra, na versão 4.1.3.0.

GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica, de distribuição livre sob a GNU *General Public License*. É escrito em Java, o que o torna disponível em múltiplas plataformas. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University.

É um programa que permite realizar construções utilizando pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas assim como funções e alterar todos esses objetos dinamicamente após a construção estar finalizada.

Além das construções geométricas, podem ser incluídas equações e coordenadas diretamente. Desse modo, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, vetores e pontos, derivar e integrar funções e ainda oferece comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isso, o programa reúne as ferramentas tradicionais de Geometria, com outras ferramentas mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Portanto, tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: a sua representação geométrica e a sua representação algébrica.

O *site* oficial do GeoGebra é http://www.geogebra.org/cms/pt_BR. A partir desse *site* é possível fazer o *download* do programa e do seu tutorial, bem como conhecer mais sobre suas possibilidades e potencialidades.

Créditos

Esta apostila de Desenho Geométrico constitui parte do material didático desenvolvido anteriormente pelo professor Rolf Jentzsch, e revisado, em 2010, pela professora Clarissa Ferreira Albrecht, ambos do Departamento de Arquitetura e Urbanismo da Universidade Federal de Viçosa.

As atualizações e acréscimos do conteúdo aqui presente foram realizados conjuntamente pela professora Clarissa Ferreira Albrecht (coordenadora) e pelos estudantes Luiza Baptista de Oliveira (tutora, pós-graduação) e Cristiano Ferreira de Oliveira (estagiário, graduação), com o apoio da Coordenadoria de Educação Aberta e à Distância (CEAD) da Universidade Federal de Viçosa e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).